Modul 6 Grundwasserhydrologie
Teil 2 Grundwasserströmungsberechnung

2. Allgemeine Strömungsgleichung

Prof. Dr. Ralph Watzel

Regierungspräsidium Freiburg
Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau
Albertstraße 5
79104 Freiburg im Breisgau
ralph.watzel@rpf.bwl.de

Grundproblem der Geohydraulik

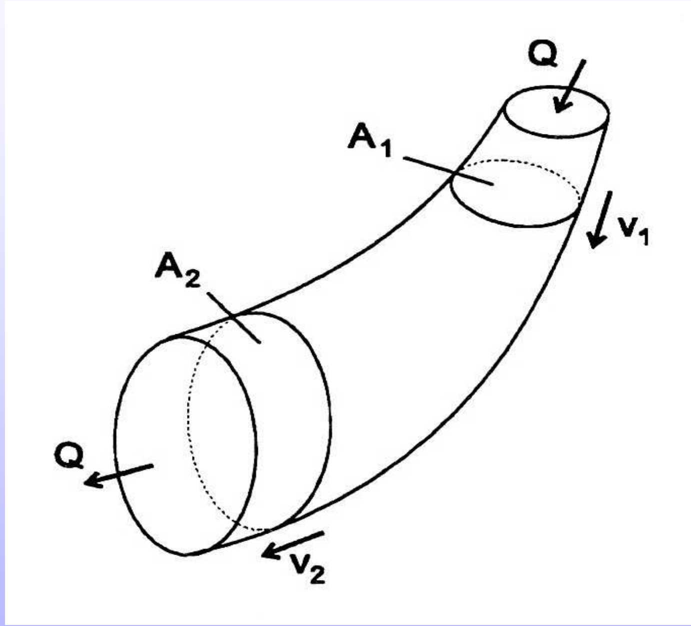
Die interessanteste und wichtigste Größe bei der Betrachtung von Grundwasser ist der Volumenfluss Q [m³/s].

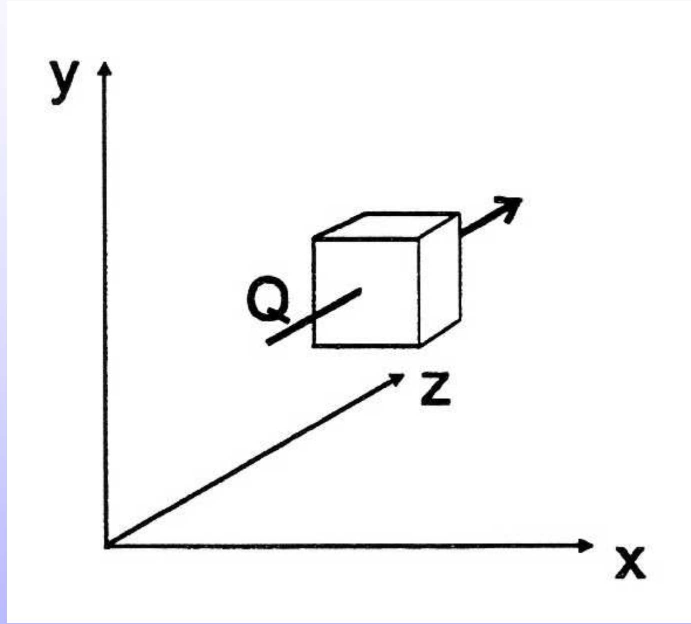
Außer an Quellen ist Q im Grundwasser unterirdisch quasi nicht direkt zu messen (wesentlicher Unterschied zu Oberflächengewässerhydrologie).

Demgegenüber sind die Standrohrspiegelhöhe h [m] bzw. der Wasserdruck p einfach und präzise messbar.

Aus diesem Grund wird Q aus gemessenen Standrohr-spiegelhöhen h_i, geohydraulischen Systemparametern (S_s, k_f) und geometrischen Gegebenheiten errechnet.

Allgemeine Strömungsgleichung





Fluss durch eine Stromröhre

$Q = A \bullet v = A1 \bullet v1 =$

$= A2 \bullet v2 = \text{constant}$

Durchflusszelle der

Kantenlänge dx, dy, dz

$Q_{xyz} = \text{constant}$

Allgemeine Strömungsgleichung

Das Gesetz der Massenerhaltung besagt, daß die sich im Zeitintervall dt in einem ortsfesten Volumenelement V ändernde Masse $d\rho V$ (=Speicherung) gleich sein muß der Differenz der in diesem Zeitintervall über die Randflächen des Volumenelements ein- und austretenden Massen ρV_{in_intern}, ρV_{out_intern} einschließlich des Massenzuwachses bzw. -reduzierung ρV_{in_extern}, ρV_{out_extern} (Quellen, Senken) innerhalb des Volumenelements.

Die ein- und austretenden Wassermassen werden mit Hilfe der DARCY-Gleichung berechnet.

Allgemeine Strömungsgleichung

Kontinuitätsbedingung für Wasser mit konstanter Dichte:

$$div\,q = -\frac{\partial n_e}{\partial t} + w$$

mit

$$div\,q = \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} = \nabla q$$

div = Divergenz

∇ = Nabla-Operator

∂ = partielles Differential

q = Vektor der Darcy- bzw. Filtergeschwindigkeit [$L\,T^{-1}$]

q_x, q_y, q_z = Komponenten von q in x, y und z - Richtung [$L\,T^{-1}$]

n_e = nutzbare Porosität [-]

w = Externer Zufluss (positiv) oder Abfluss (negativ) bezogen auf das Kotrollvolumen [$1\,T^{-1}$]

Allgemeine Strömungsgleichung

Die DARCY-Gleichung lautet in vektorieller Form:

$$q = -k_f \nabla h \quad \text{mit} \quad \nabla h = \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

Die richtungsabhänige (anisotrope) Durchlässigkeitsbeiwert $\mathbf{k_f}$ wird durch einen Tensor beschrieben. x ,y und z sind die Hauptachsen der Anisotropie. Durch Ausrichten der Hauptachsen an den Achsen des Koordinatensystems werden die Elemente außerhalb der Hauptiadonalen zu Null.

$$K_f = \begin{vmatrix} k_{f,xx} & k_{f,xy} & k_{f,xz} \\ k_{f,yx} & k_{f,yy} & k_{f,yz} \\ k_{f,zx} & k_{f,zy} & k_{f,zz} \end{vmatrix}$$

mit $k_{xy} = k_{yx}$, $k_{xz} = k_{zx}$, $k_{yz} = k_{zy}$

$$K_f = \begin{vmatrix} k_{f,xx} & 0 & 0 \\ 0 & k_{f,yy} & 0 \\ 0 & 0 & k_{f,zz} \end{vmatrix}$$

Allgemeine Strömungsgleichung

Die Kombination von Kontinuitätsgleichung und DARCY-Gleichung ergibt die allgemeine Strömungsgleichung für nicht kompressible Flüssigkeiten konstanter Dichte und Viskosität:

$$\nabla(k_f \nabla h) = -\frac{\partial n_e}{\partial t} + w$$

bei instationärer Strömung:

$$\nabla(k_f \nabla h) = -S_0 \frac{\partial h}{\partial t} + w$$

Allgemeine Strömungsgleichung

Im gespannten Aquifer ergibt sich der Speicherkoeffizient aus:

$$S_0 = \frac{S_g}{m}$$

S_g = Speicherkoeffizient im gespannten Aquifer [-]

m = wassererfüllte Mächtigkeit des Aquifers [L]

Im ungespannten Aquifer aus:

$$S_0 = \frac{n_e + S_g}{m}$$

n_e = entwässerbare Porosität

Allgemeine Strömungsgleichung

Im allgemeinen 3D-Fall werden alle räumlichen Dimensionen explizit behandelt:

$$\frac{\partial(q_x)}{\partial x}+\frac{\partial(q_y)}{\partial y}+\frac{\partial(q_z)}{\partial z}=-S_0\frac{\partial h}{\partial t}+w$$

q_x, q_y, q_z = Filtergeschwindigkeit in x, y und z - Richtung [L T^{-1}]

w = Externer Zufluss (positiv) oder Abfluss (negativ), bezogen auf das Kotrollvolumen [T^{-1}]

S_0 = spezifischer Speicherkoeffizient [L^{-1}]

Allgemeine Strömungsgleichung

Durch Einsetzen des DARCY-Gesetzes erhält man:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_{f,xx}\frac{\partial h}{\partial x}-k_{f,xy}\frac{\partial h}{\partial y}-k_{f,xz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_{f,yx}\frac{\partial h}{\partial x}-k_{f,yy}\frac{\partial h}{\partial y}-k_{f,yz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\\
&+\frac{\partial}{\partial x}\left(-k_{f,zx}\frac{\partial h}{\partial x}-k_{f,zy}\frac{\partial h}{\partial y}-k_{f,zz}\frac{\partial h}{\partial z}\right)\\
&=-S_0\frac{\partial h}{\partial t}+w
\end{aligned}
$$

$k_{f,\,xx}$ usw.: Komponenten des Durchlässigkeitstensors [L T^{-1}]

Aquifereigenschafen und Gleichung

3D, instationär, anisotrop

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_f^x \frac{\partial h}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_f^y \frac{\partial h}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(k_f^z \frac{\partial h}{\partial z}\right) = S_s \frac{\partial h}{\partial t}$$

3D, instationär, isotrop

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = \frac{S_s}{k_f} \frac{\partial h}{\partial t}$$

3D, stationär, isotrop

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} = 0$$

2D-horinz., instationär, isotrop (tiefengemittelt), gespannt

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} = \frac{S}{T} \frac{\partial h}{\partial t}$$

In allen Gleichungen kann noch ein Quellen-Term ergänzt werden (± w)!

PDG 2. Ordnung

- Die Gleichungen dieser Form heißen partielle Differentialgleichungen 2. Ordnung.
- Sie wird durch Einsetzten der DARCY-Gleichung in die Kontinuitätsgleichung gewonnen.
- Die Lösung dieser Gleichung h(x,y,z,t) ergibt für jeden Zeitpunkt t_i die Standrohrspiegelhöhe h an Punkten (x,y,z) des Grundwasserleiters.
- Zur Lösung müssen die Parameter S_s und k_f bzw. S und T bekannt sein.
- Analytische wie numerische Lösungen erfordern weiterhin die Festlegung von Randbedingungen, bei instationären Strömungen auch Anfangsbedingungen.

Randbedingungen

Randbedingungen beschreiben mathematisch die (Funktion) der Standrohrspiegelhöhen oder die physikalische Art des Wasseraustausches an Rändern des betrachteten Systems.

Randbedingung 1. Art (DIRICHLET-Bedingung)

$$h_{Rand} = \text{const.} \qquad h_{Rand} = f\,(t)$$

Die Standrohrspiegelhöhe an einem Rand ist vorgegeben (Festpotenzialrand).

Beispiel: Gewässer steht mit Aquifer im vollständigen hydraulischem Kontakt, so dass die Standrohrspiegelhöhe durch Infiltration/Exfiltration auf der Höhe des Gewässerspiegels fixiert ist.

Randbedingungen

Randbedingung 2. Art (NEUMANN-Bedingung)

$$\partial h/\partial \mathbf{n} = f(t) \qquad \partial h/\partial \mathbf{n} = \text{const.}$$

Vorgegeben ist ein fester Randzufluss. Der Gradient senkrecht zu dem Rand (Normalenkomponente des Fließvektors auf den Rand) ist vorgegeben. $Q = - k_f \cdot \partial h/\partial \mathbf{n}$

Beispiel: Grenze eines Lockergesteins-Aquifers zu einem Festgesteins-Aquifer, der aus seinem Einzugsgebiet einen bekannten Zufluß spendet.

Spezialfall undurchlässiger Rand: $\partial h/\partial \mathbf{n} = 0$

Randbedingungen

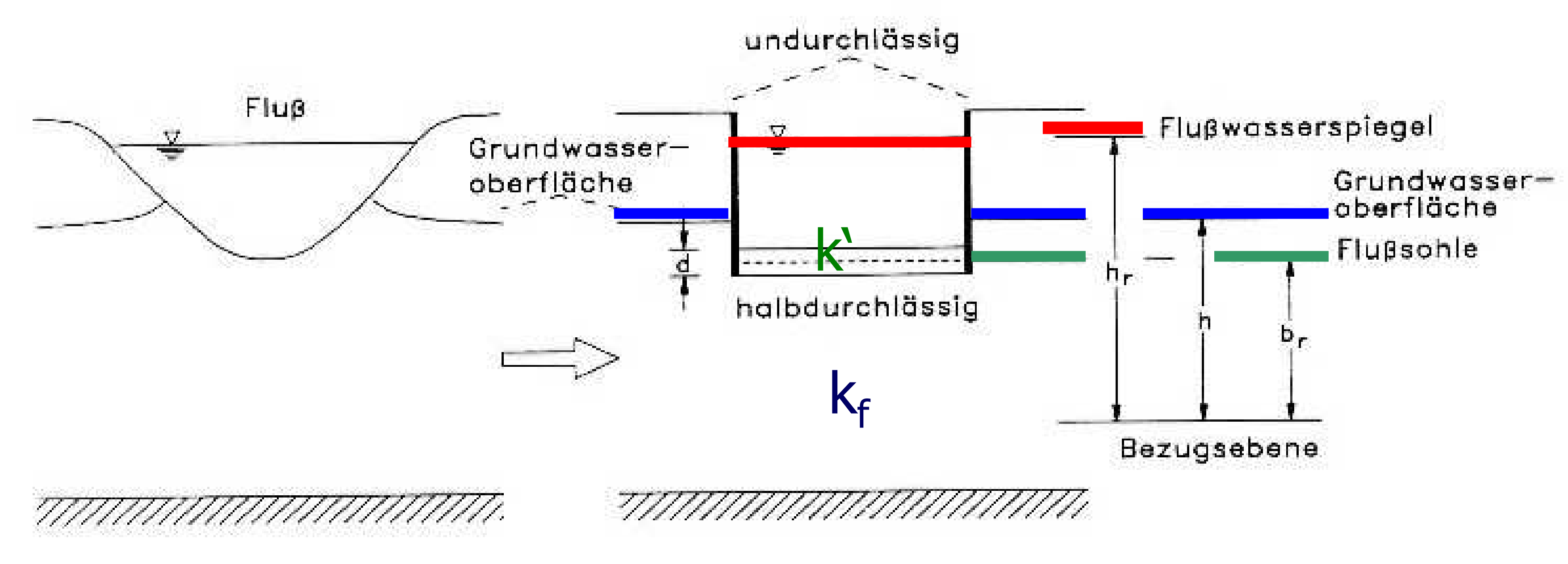
Randbedingung 3. Art (CAUCHY-Bedingung)

$$\left[a \cdot h + b \cdot \partial h/\partial n\right]_{Rand} = f(t) \qquad \text{bzw.} = \text{const.}$$

Vorgegeben ist eine Linearkombination aus Randbedingung 1. und 2. Art. Sie beschreibt einen Rand mit „leaky“ Charakter des Randes oder einen halbdurchlässigen Rand. Dabei wird die äußere Standrohrspiegelhöhe abgeschwächt durch einen Widerstand wirksam. Variation zwischen 1. und 2. Art je nach Parameterbeschaffenheit.

Beispiel: Reservoir (Gewässer, anderer Aquifer) mit unvollständigem hydraulischen Kontakt.

Randbedingungen



Randbedingung 3. Art am Beispiel eines Flusses:

Wasserfluss durch Sohlschicht: $Q_{Leakage} = k`/d \cdot (h_r - h)$

Wasserfluss in den Aquifer: $Q_{in} = - k_f \cdot \partial h/\partial n$

Randbedingungen

Randbedingungen sind überall dort anzugeben, wo Wasser-austausch mit dem betrachteten Aquifer(bereich) auftritt:

an äußeren, physikalischen Rändern

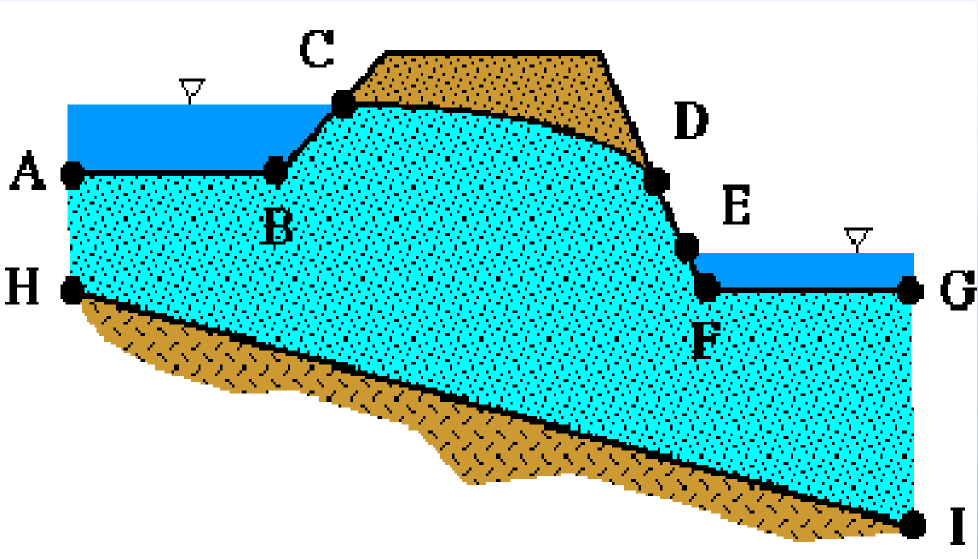
Beispiel: Oberflächengewässer, Stromlinien, Grundwasser-gleichen, geologischer Aquiferrand

an inneren „Rändern"

Beispiel: Brunnen, Baugruben, Drainagen, Sickergalerien, Oberflächengewässer

Randbedingungen

Hydraulische Ränder an einem durchströmten Erddamm

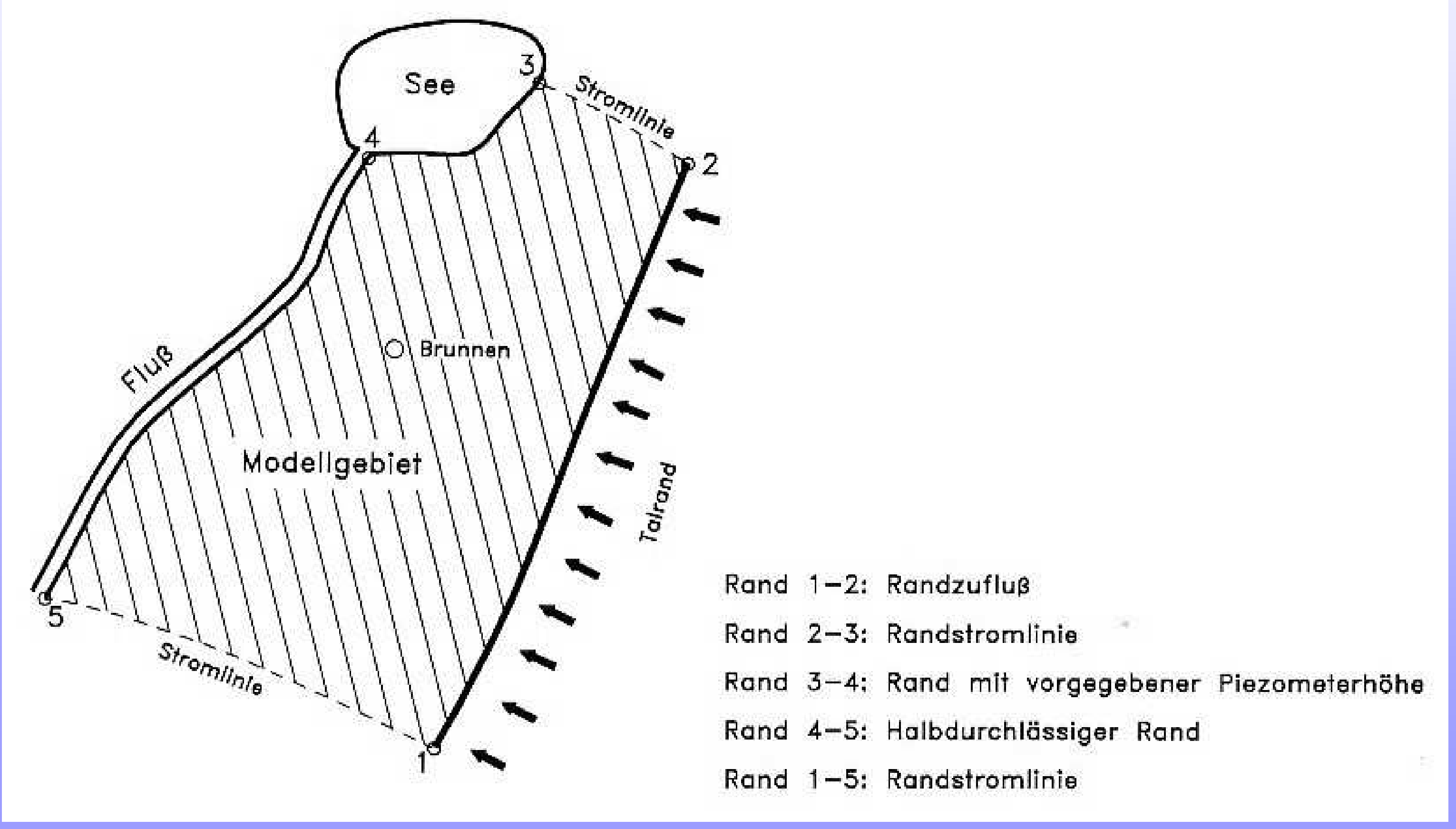


ABC, EFG: Festpotenzial oder Leakage-Rand falls Kolmationsschicht
CD: freie Oberfläche oder Zustromrand falls Grund-wasserneubildung
AH, GI: Zustrom- bzw. Abstrom- od. Festpotenzialrand

HI: undurchlässiger Rand = spezieller Zustromrand
DE: $h = z$, $\psi = 0$; Wasser läuft aus, spezieller Abstromrand

Randbedingungen

Beispiel für Randbedingungen in einem Strömungsmodell (KINZELBACH & RAUSCH, 1995):



Anfangsbedingungen

Bei instationärer Strömung wird die Standrohrspiegelhöhe in Abhängigkeit der Zeit (und in Abhängigkeit des Ortes) betrachtet.

Für die Berechnung der Standrohspiegelhöhe an einem bestimmten Ort zu einer bestimmten Zeit $h_{x,y,z}$ (t_1) muss sie an dem gleichen Ort zu einer Zeit davor $h_{x,y,z}$ (t_0) bekannt sein.

Daneben sind Randbedingungen und die Systemparameter Durchlässigkeit und Speicherkoeffizient für die Berechnung erforderlich.

Numerische Lösungen

Unter Vorgabe von S_s und k_f wird h nicht für jeden beliebigen Punkt x,y,z und jede beliebige Zeit t berechnet, sondern für eine diskrete Anzahl von Orten x_i,y_i,z_i und für eine diskrete Anzahl von Zeitpunkten t_i.

Durch räumliche Variation von S_s und k_f bzw. S und T innerhalb des diskretisierten Bereichs (Domain) können Heterogenitäten des Aquifer(system)s abgebildet werden.

Numerische Lösungen sind nur „endlich“ genau; in Abhängigkeit der Diskretisierung, lassen sich aber für quasi beliebige Aquiferkonstelationen mit hinreichender Genauigkeit erzeugen.

Q lässt sich für beliebige Geometrien leicht aus $h_{x,y,z}$ errechnen.

Zusammenfassung

Die Grundwasserströmung im Untergrund lässt sich durch die allgemeine Strömungsgleichung beschreiben.

Dabei wird die Gültigkeit des DARCY-Gesetzes vorausgesetzt.

Die Lösung der Gleichung ist die Standrohrspiegelhöhe h an bestimmten Orten und zu bestimmten Zeiten. Dazu gibt es analytische und numerische Rechentechniken.

Aus der Verteilung von h und den zu Grunde gelegten Systemparametern S_s und k_f kann der Wasserfluss Q für bestimmte Querschnitte oder Orte berechnet werden.