

Modul 6 Grundwasserhydrologie

Teil 2 Grundwasserströmungsberechnung

3. Analytische Lösungen

Prof. Dr. Ralph Watzel

**Regierungspräsidium Freiburg
Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau
Albertstraße 5
79104 Freiburg im Breisgau
ralph.watzel@rpf.bwl.de**

Analytische Lösungen

Die (analytische) Lösung der PDG ergibt keinen Zahlenwert, sondern eine (analytische) Funktion $h(x,y,z,t) \{S_s, k_f\}$!

Durch das Einsetzen von x,y,z und t und Vorgabe von S_s und k_f lässt sich h für jeden Punkt und jede Zeit berechnen.

Analytische Lösungen existieren vorwiegend für 1- und 2D-Probleme.

Gleichungen zur Auswertung von Pumpversuchen sind analytische Lösungen für bestimmte Spannungszustände eines Aquifers (z.B. THEIS, HANTUSH, BOULTON) sowie für homogene, isotrope und unendlich ausgedehnte Aquifere.

Analytische Lösungen

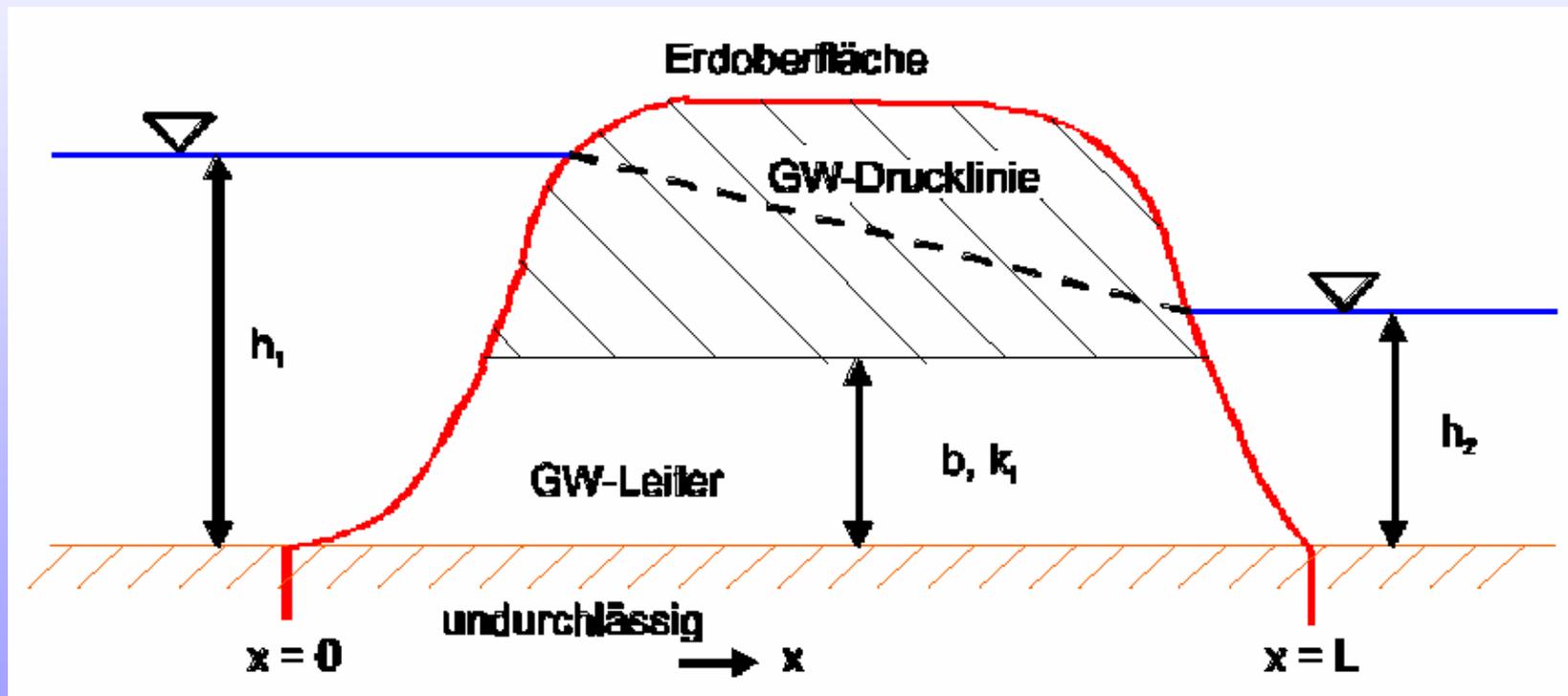
Analytische Lösungen der allgemeinen Strömungsgleichung sind ein sogenanntes Randwert-Problem. Sie erfordern Angaben über:

1. Größe und Ausdehnung des durchströmten Bereichs
2. Strömungsbedingungen in diesem Bereich
3. Bedingungen an den Rändern dieses Bereichs
4. Anfangsbedingungen (instationär)
5. Räumliche Verteilung der hydraulischen Parameter

Die analytische Lösung gilt nur für die jeweilige Konstellation, für die sie ermittelt wurde.

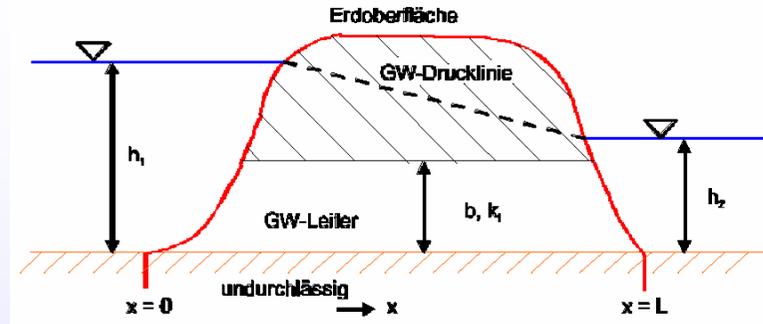
1D-Strömung zwischen zwei Gräben

Homogener, isotroper, gespannter Aquifer bei stationärer Strömung, Koordinatensystem an Aquiferrand ausgerichtet



Gesucht: analytische Lösungen $h(x)$ und $Q(x)$

1D-Strömung zwischen zwei Gräben



$\partial^2 h / \partial x^2 + \partial^2 h / \partial y^2 + \partial^2 h / \partial z^2 = 0$ vereinfacht sich zu

$\partial^2 h / \partial x^2 = 0$ allgemeine Lösung lautet: $h(x) = C_1 + C_2 \cdot x$

Randbedingungen: für $x = 0$: $h = h_1 \rightarrow C_1 = h_1$

für $x = L$: $h = h_2 \rightarrow C_2 = (h_2 - h_1) / L$

in die allgemeine Lösung eingesetzt ergibt dies die

analytische Lösung: $h(x) = h_1 + x \cdot (h_2 - h_1) / L$

2D-Strömung horizontal eben

Homogener, isotroper, freier Aquifer konstanter Mächtigkeit, ohne Entnahme oder GWN bei stationärer Strömung. Koordinatensystem parallel zur Strömungsrichtung (x-Achse):

$$h(x,y) = - v_f/k_f \cdot (x \cdot \cos\phi + y \cdot \sin\phi) + h_0$$

mit:

h_0 = Standrohrspiegelhöhe im Koordinatenursprung

v_f = DARCY-Geschwindigkeit in Hauptströmungsrichtung

ϕ = Winkel der Strömungsrichtung gegen die x-Achse

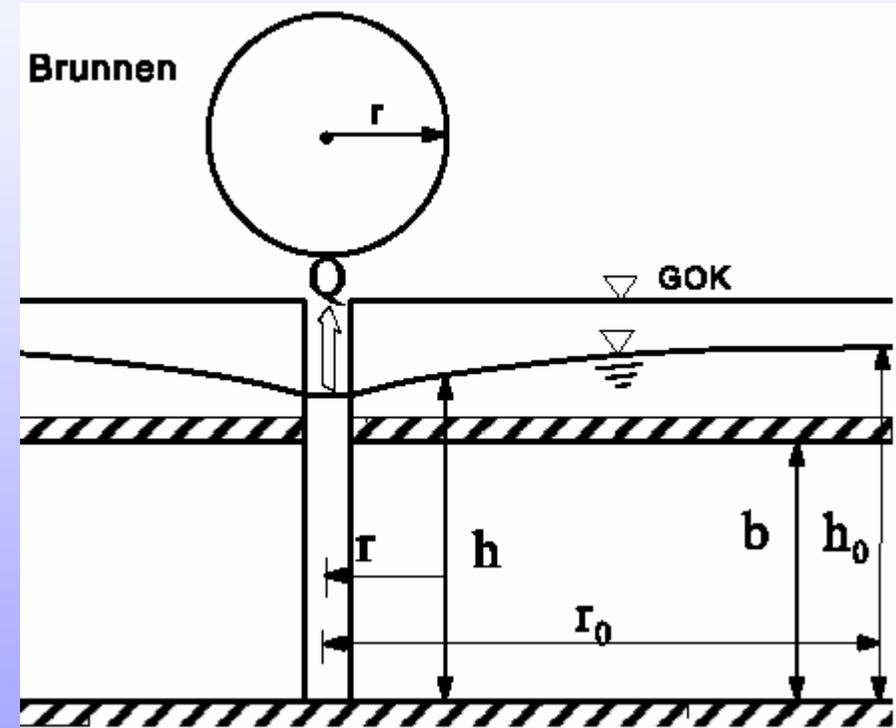
2D-Strömung Brunnenentnahme

Stationäre Brunnenströmung im homogenen, isotropen, gespannten Aquifer ohne Grundwassergefälle

(THIEM-Gleichung):

$$s(r) = h_0 - h(r) = \left(\frac{Q}{2 \Pi k_f m} \right) \cdot \ln \left(\frac{r_0}{r} \right)$$

radiale Symmetrie



2D-Strömung Superposition

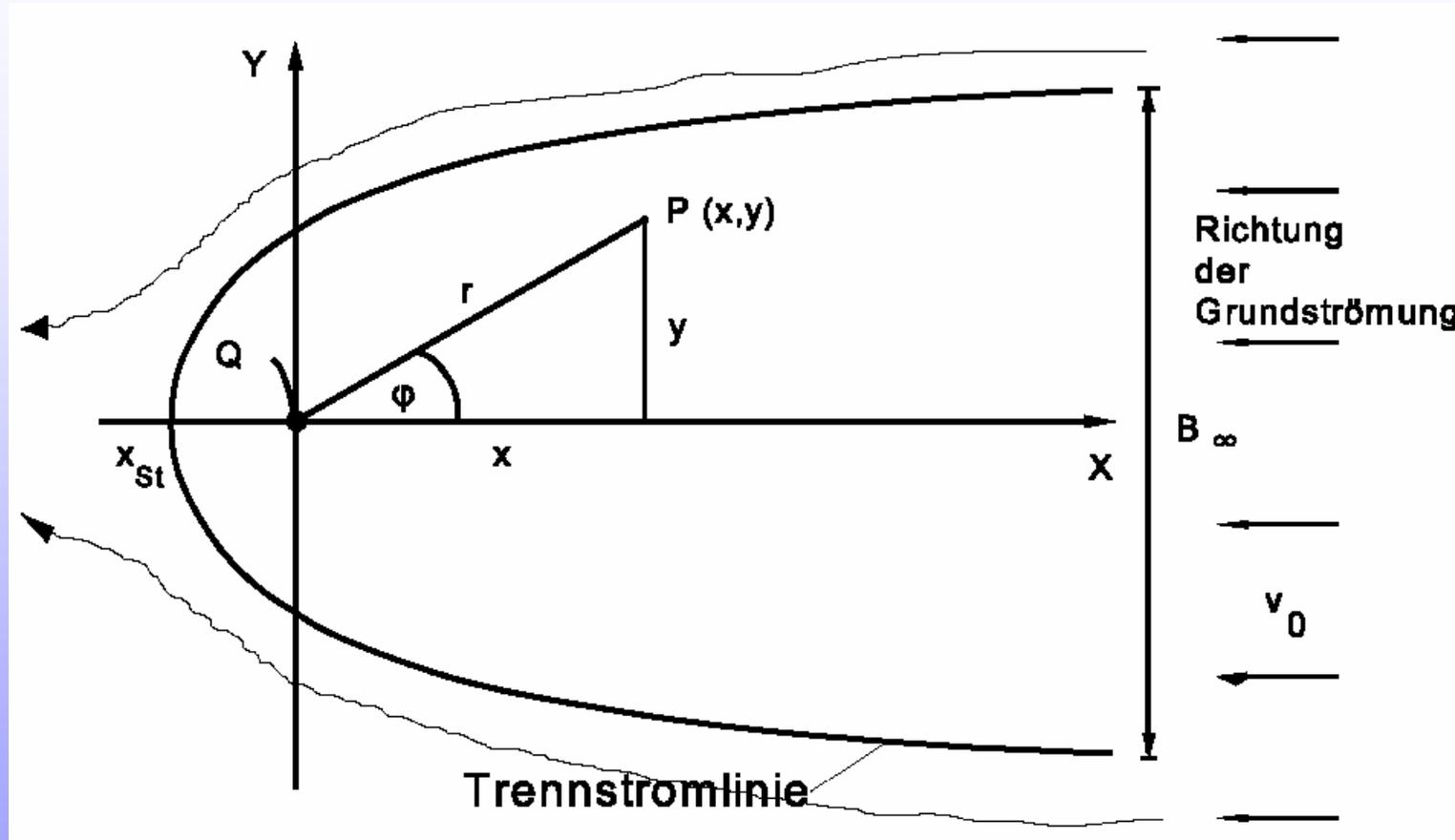
Überlagerung der beiden Strömungen nach dem Superpositionsprinzip ergibt:

$$h_{\text{tot}} = h_{\text{reg}} + h_{\text{well}}$$

$$h_{\text{tot}}(x,y) = -v_f/k_f \cdot (x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi) + h_0 + (Q / 2 \Pi k_f m) \cdot \ln [(x - x_{\text{well}})^2 + (y - y_{\text{well}})^2]$$

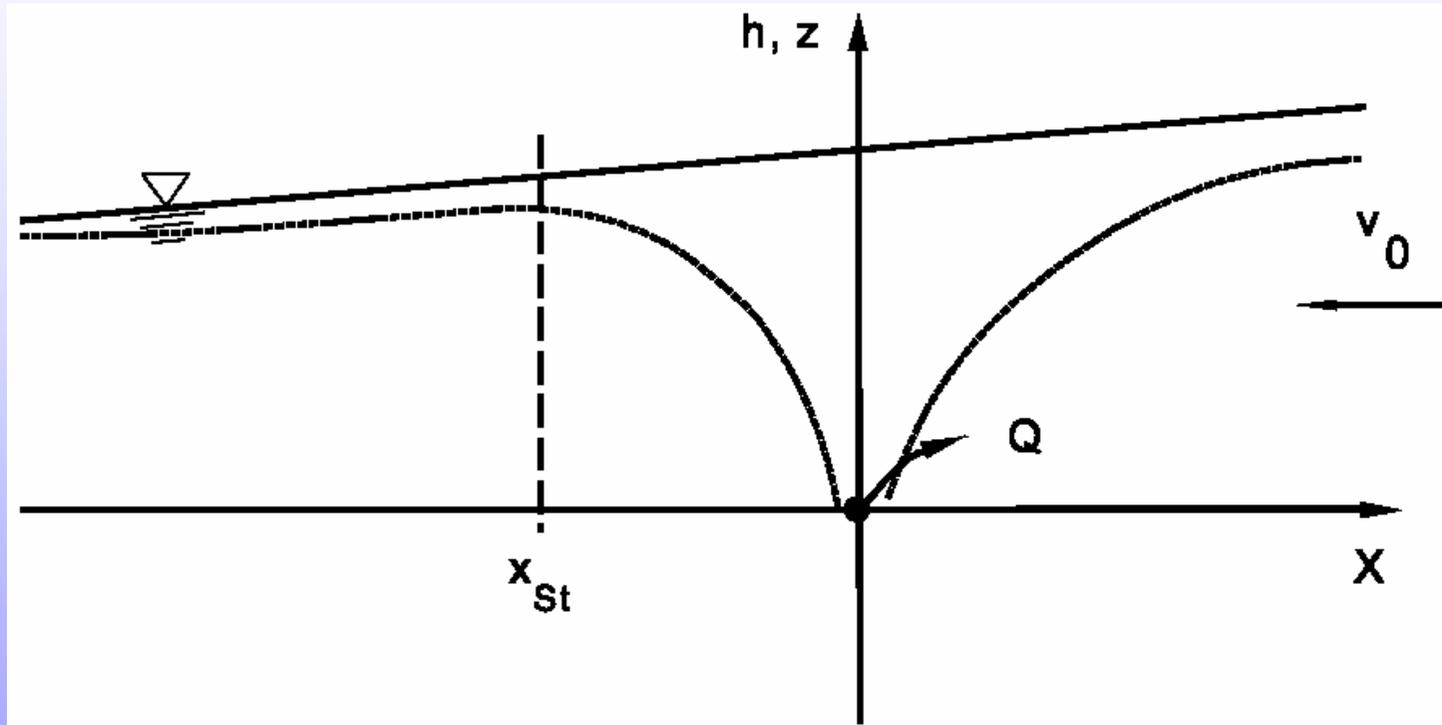
Die Superposition von Regional- und Brunnenströmung verursacht einen unsymmetrischen Zustromtrichter, innerhalb dessen (Trennstromlinie) alle Stromlinien zum Brunnen laufen. Stromlinien außerhalb der Trennstromlinie werden vom Brunnen nicht mehr erfaßt.

2D-Strömung Superposition



Grundströmung, Brunnen, Trennstromlinien, Staupunkt

2D-Strömung Superposition



Grundströmung, Brunnen, Trennstromlinien, Staupunkt

2D-Strömung Superposition

$$h_{\text{tot}}(x,y) = -v_f/k_f \cdot (x \cdot \cos \phi + y \cdot \sin \phi) + h_0 + (Q / 2 \Pi k_f m) \cdot \ln [(x - x_{\text{well}})^2 + (y - y_{\text{well}})^2]$$

Die Gleichung der Trennstromlinie ergibt sich aus:

$$0 = x \cdot \sin (y 2 \Pi m v_f / Q) + y \cdot \cos (y 2 \Pi m v_f / Q)$$

Der Staupunkt ($v_x = 0, v_y = 0$) ermittelt sich aus:

$$x_{\text{St}} = Q / 2 \Pi m v_f$$

Die asymptotische Entnahmebreite: $B_{\infty} = Q / m v_f$

Analytische Lösungen

Vorteile analytischer Lösungen:

Sind sie einmal entwickelt, lässt sich h aus einer einfachen Rechenregel schnell ermitteln.

Nachteile analytischer Lösungen:

Reale Aquifer(systeme)e sind nicht homogen, nicht isotrop und nicht unendlich ausgedehnt.

Für bestimmte, realistische Aquiferkonstellationen lassen sich keine analytischen Lösungen finden.

Q ist dann nicht immer direkt aus h errechenbar.