

# **Modul 6 Grundwasserhydrologie**

## **Teil 2 Grundwasserströmungsberechnung**

### **4. Finite-Differenzen-Verfahren**

**Prof. Dr. Ralph Watzel**

**Regierungspräsidium Freiburg  
Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau  
Albertstraße 5  
79104 Freiburg im Breisgau  
ralph.watzel@rpf.bwl.de**

# Finite-Differenzen-Verfahren

- Ein numerisches Strömungsmodell ist eine räumlich und zeitlich diskretisierte Wasserbilanz eines Gebietes  $\Omega$ .
- Für eine endliche (finite) Zahl von Knoten/Zellen wird die Standrohrspiegelhöhe  $h_{i,j}$  berechnet. Grundlage der Berechnung sind die Wasserbilanzen für die endliche (finite) Zahl der Zellen.
- Differentialquotienten werden durch Differenzenquotienten für bestimmte Geometrien (Knoten/Zellen) und Zeitschritte ersetzt.

$$\frac{\partial h}{\partial x} \approx \frac{\Delta h}{\Delta x} = \frac{h_2 - h_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t} \approx \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{h_2 - h_1}{t_2 - t_1}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Strömungsgleichung im 2D-Fall:

$$\frac{\partial(m q_x)}{\partial x} + \frac{\partial(m q_y)}{\partial y} = -m S_0 \frac{\partial h}{\partial t} + m w$$

$m$  = durchströmte Mächtigkeit (im freien Aquifer ist  $m = h$ ) [L]

Strömungsgleichung im 2D-Fall:

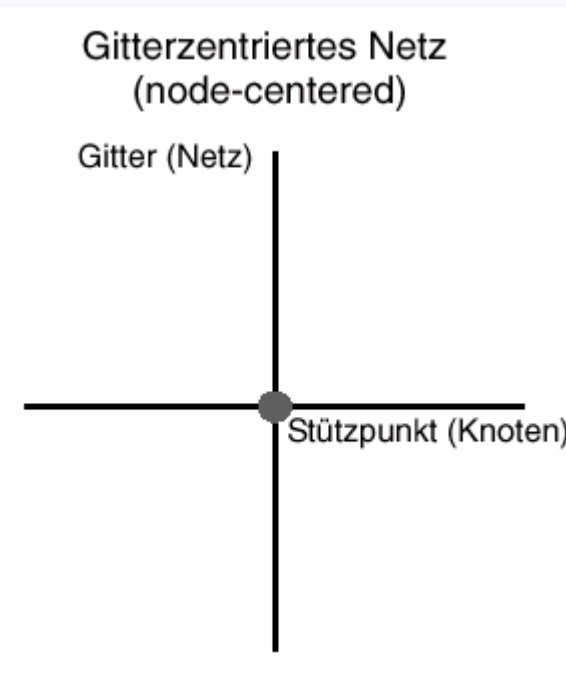
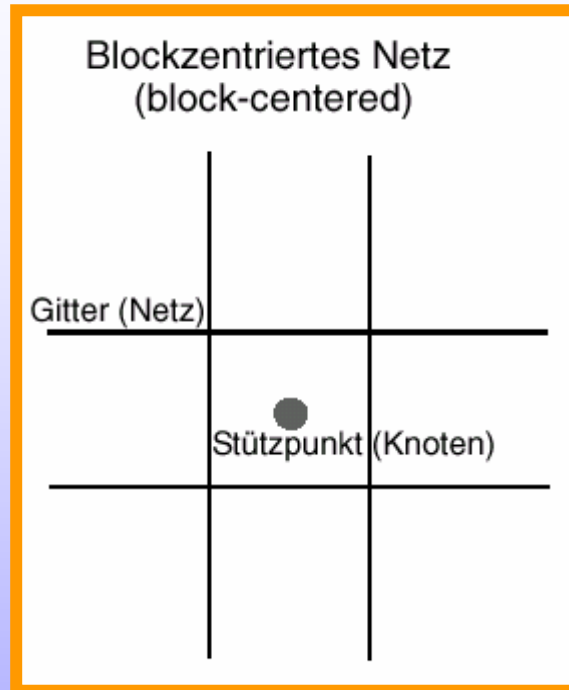
$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -m k_{f,xx} \frac{\partial h}{\partial x} - m k_{f,xy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( -m k_{f,yx} \frac{\partial h}{\partial x} - m k_{f,yy} \frac{\partial h}{\partial y} \right) = -S \frac{\partial h}{\partial t} + w_2$$

$k_{f,xx}$  usw.: Komponenten des Durchlässigkeitstensors [ $L T^{-1}$ ]

$S = mS_0$ : Speicherkoeffizient [-]

$w_2$  = Externer Zufluss (positiv) oder Abfluss (negativ), bezogen auf die Querschnittsfläche in der x-y-Ebene [ $L T^{-1}$ ]

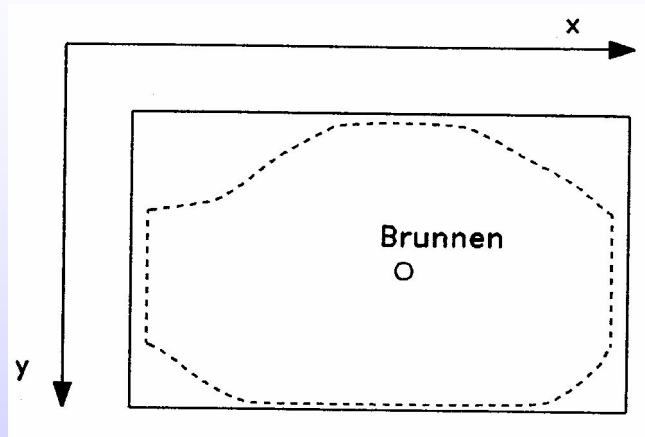
# Finite-Differenzen-Verfahren



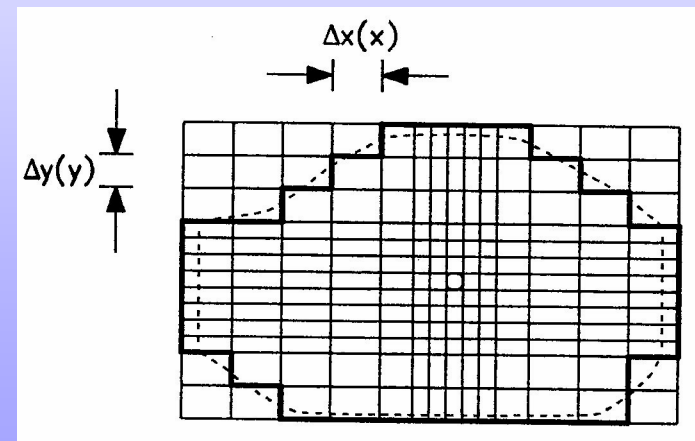
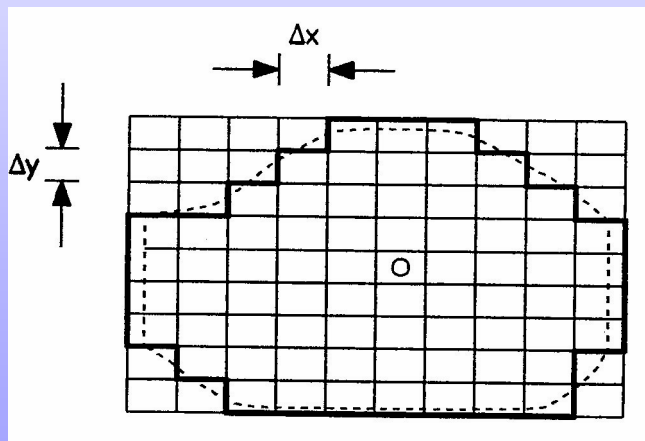
Knotenzentriertes  
Netz

Gitterzentriertes  
Netz

# Finite-Differenzen-Verfahren



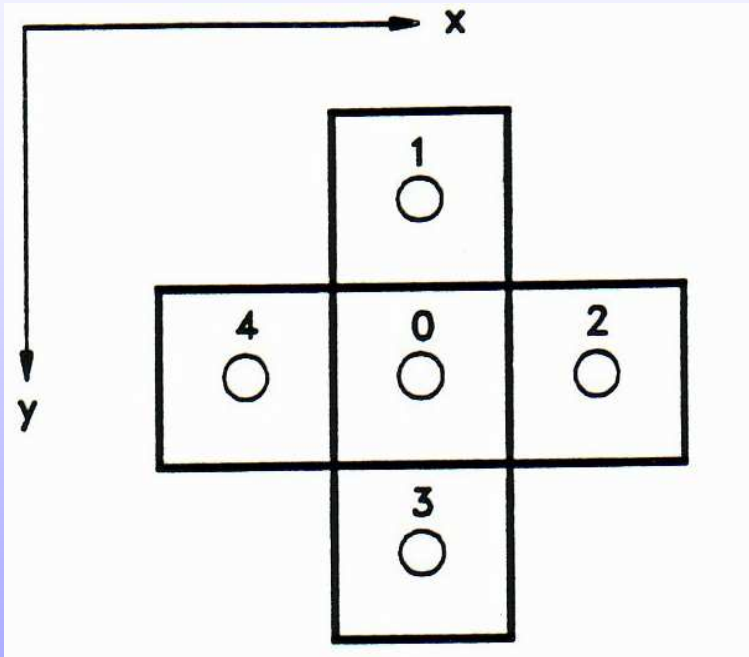
Aufsicht des Modellgebietes



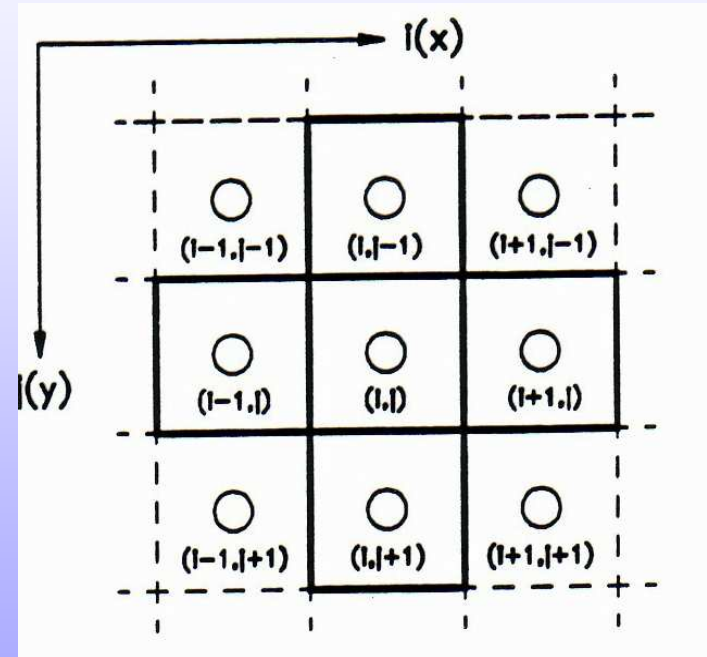
Diskretisierung mit konstanten und variablen Gitterweiten

# Finite-Differenzen-Verfahren

Die finiten Knoten werden mit Indices bezeichnet:



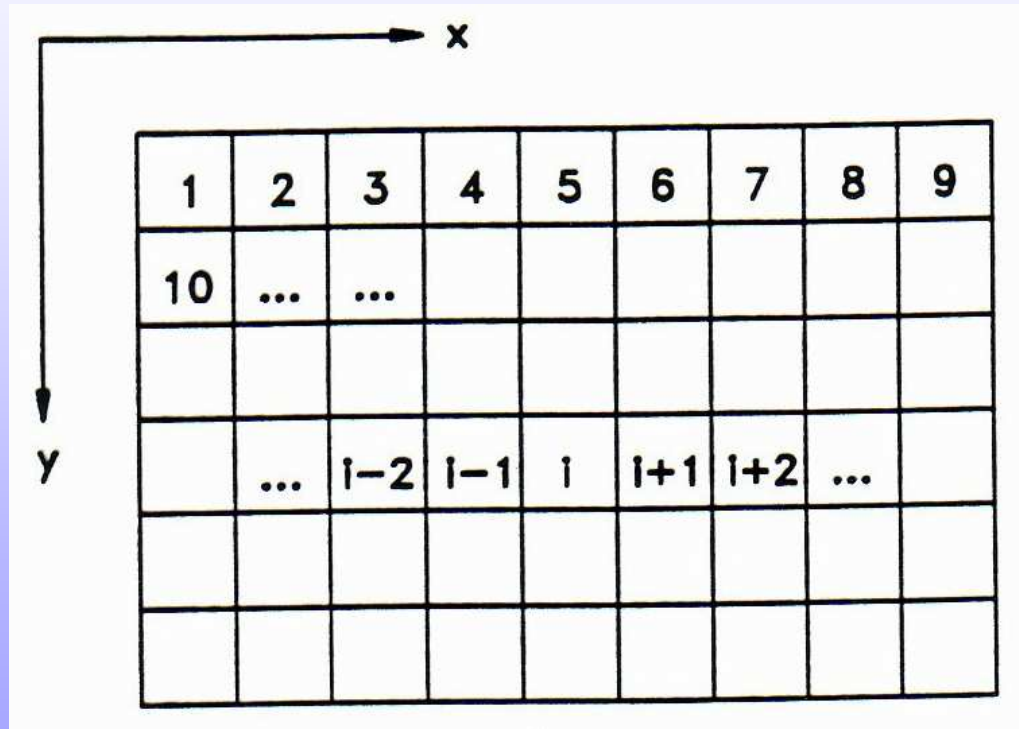
Lokale Indices



Globale Indizierung  
(Doppelindices)

# Finite-Differenzen-Verfahren

Die finiten Knoten werden mit Indices bezeichnet:



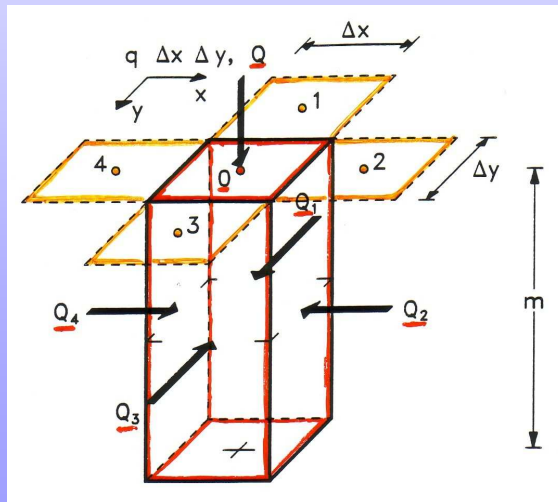
Globale Indizierung (Einfachindices)

# Finite-Differenzen-Verfahren

Zustrom - Abstrom (t, t+Δt) = Δ Speichervolumen (t, t+Δt)

$$\Delta t(Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q) = (h_0(t + \Delta t) - h_0(t))S_0 \Delta x \Delta y$$

Mit DARCY erhält man:



$$Q_1 = \Delta x T_{10} \frac{h_1(t') - h_0(t')}{\Delta y}$$

$$Q_2 = \Delta y T_{20} \frac{h_2(t') - h_0(t')}{\Delta x}$$

$$Q_3 = \Delta x T_{30} \frac{h_3(t') - h_0(t')}{\Delta y}$$

$$Q_4 = \Delta y T_{40} \frac{h_4(t') - h_0(t')}{\Delta x}$$



# Finite-Differenzen-Verfahren

Annahme:  $Q_{1-4}$  während des Zeitintervalls  $(t, t+\Delta t)$  wird durch die  $h_{1-4}$  zu einem Zeitpunkt  $t'$  innerhalb  $(t, t+\Delta t)$  angenähert.

Die Vorzeichen der Zuflüsse sind +, die der Abflüsse -.

$T_{10}, T_{20}, T_{30}, T_{40}$  sind die mittleren Transmissivitäten zwischen den Knoten 0 und 1, 0 und 2, 0 und 3, 0 und 4.

Vorteil der Mittelwerte zwischen den Knoten:

mit harmonischen Mittel  $T_{10} = 2 T_1 \cdot T_2 / (T_1 + T_2)$  können einfach undurchlässige Ränder und Anisotropie simuliert werden können.

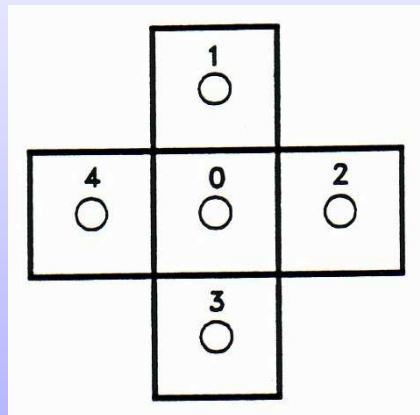
# Finite-Differenzen-Verfahren

Einsetzen der DARCY-Gleichungen in die Kontinuitätsgleichung und Division durch  $\Delta x \cdot \Delta y$  ergibt die Knotengleichung in lokalen Indices:

$$S_0 \frac{h_0(t + \Delta t) - h_0(t)}{\Delta t} =$$
$$T_{10} \frac{h_1(t') - h_0(t')}{\Delta y^2} + T_{20} \frac{h_2(t') - h_0(t')}{\Delta x^2} +$$
$$+ T_{30} \frac{h_3(t') - h_0(t')}{\Delta y^2} + T_{40} \frac{h_4(t') - h_0(t')}{\Delta x^2} + q_0$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Übergang von lokalen zu globalen (Doppel)-Indices beschreibt die Gleichung für jeden Knoten im Modellgebiet



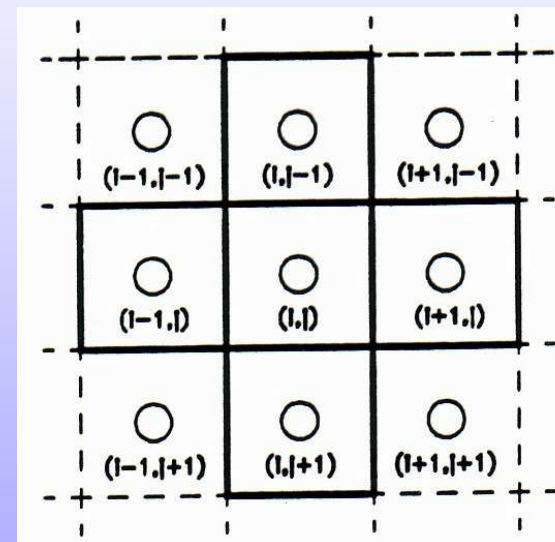
$$h_0 \text{ ---> } h_{i,j}$$

$$h_1 \text{ ---> } h_{i,j-1}$$

$$h_2 \text{ ---> } h_{i+1,j}$$

$$h_3 \text{ ---> } h_{i,j+1}$$

$$h_4 \text{ ---> } h_{i-1,j}$$



weiterhin wird  $S_0$  zu  $S_{i,j}$  und  $q_0$  wird zu  $q_{i,j}$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Zu jedem Knoten gehören zwei Transmissivitäten  $T_I$  und  $T_J$  in  $x$ - bzw.  $y$ -Richtung,

$T_{I_{i,j}}$  ist die Transmissivität zwischen dem Knoten  $(i,j)$  und dem Nachbarknoten in positiver  $x$ -Richtung  $(i+1,j)$

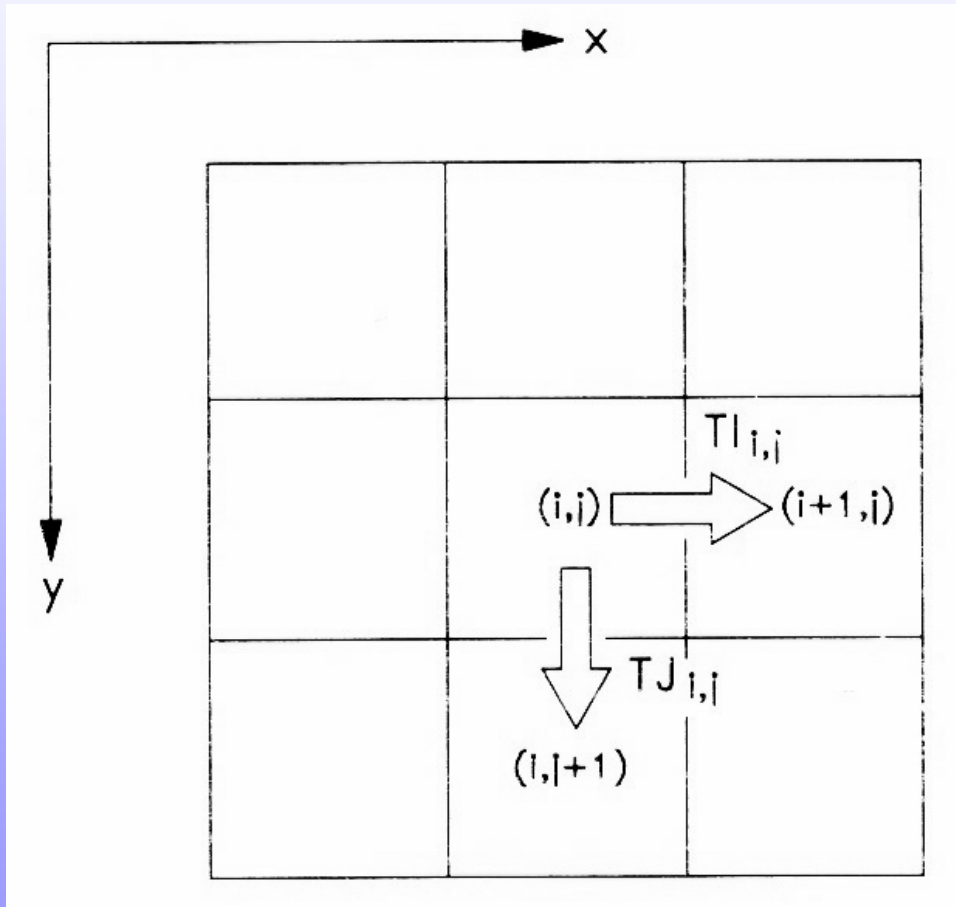
$T_{J_{i,j}}$  ist die Transmissivität zwischen dem Knoten  $(i,j)$  und dem Nachbarknoten in positiver  $y$ -Richtung  $(i,j+1)$

Die vier Transmissivitäten zwischen den benachbarten Knoten werden wie folgt ausgedrückt:

$$\begin{array}{ll} T_{10} \text{ ---} > T_{J_{i,j-1}} & T_{20} \text{ ---} > T_{I_{i,j}} \\ T_{30} \text{ ---} > T_{J_{i,j}} & T_{40} \text{ ---} > T_{I_{i-1,j}} \end{array}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Transformation der T-Wert-Indizierung:



$$\begin{aligned} 0 & \Rightarrow (i,j) \\ 1 & \Rightarrow (i,j-1) \\ 2 & \Rightarrow (i+1,j) \\ 3 & \Rightarrow (i,j+1) \\ 4 & \Rightarrow (i-1,j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{02} & \Rightarrow T_{I,i,j} \\ T_{03} & \Rightarrow T_{J,i,j} \\ T_{04} & = T_{40} = T_{I,i-1,j} \\ T_{01} & = T_{10} = T_{J,i,j-1} \end{aligned}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Es ergeben sich  $n$  Gleichungen für  $n$  Standrohrspiegelhöhen  $h_{i,j}(t+\Delta t)$ :

$$\begin{aligned}
 S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t + \Delta t) - h_{i,j}(t)}{\Delta t} = & \\
 T J_{i,j-1} \frac{h_{i,j-1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + T I_{i,j} \frac{h_{i+1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} + & \\
 + T J_{i,j} \frac{h_{i,j+1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + T I_{i-1,j} \frac{h_{i-1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} + q_{i,j} &
 \end{aligned}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Die Knotengleichungen für Randknoten enthalten Standrohrspiegelhöhen, die außerhalb des Modellgebietes ( $i = 1, \dots, N_x; j = 1, \dots, N_y$ ) liegen.

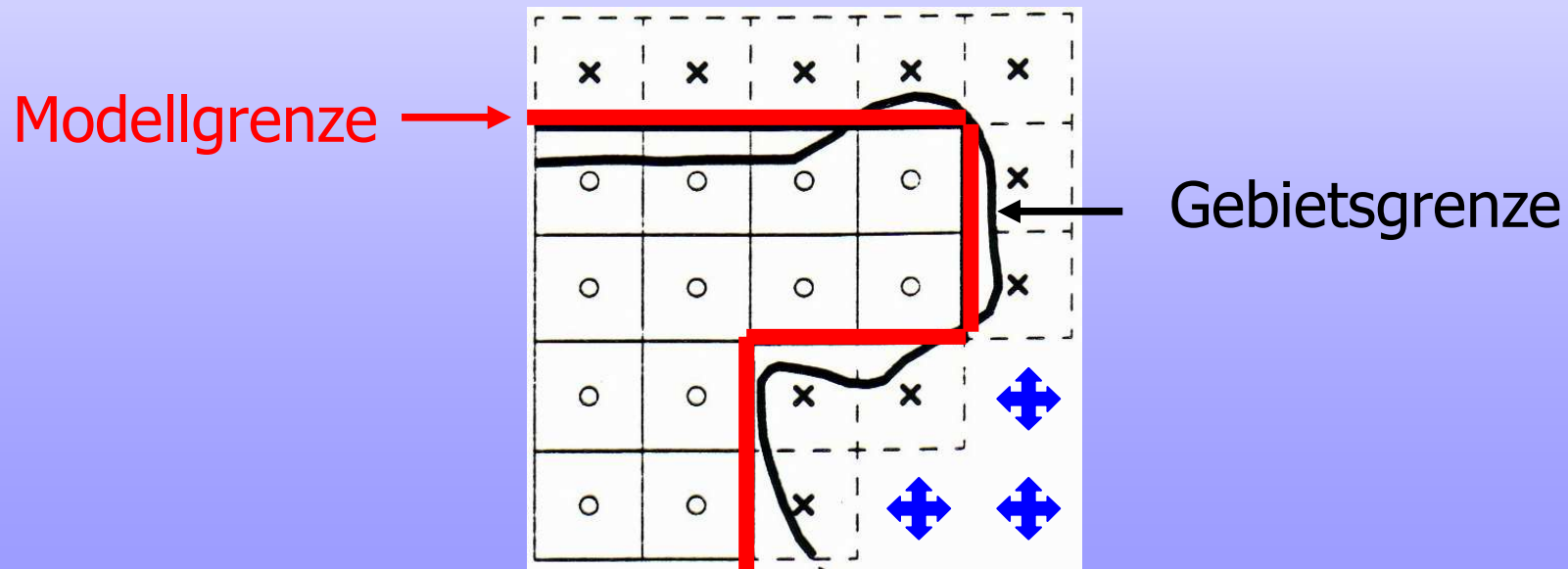
Um die Gleichungen zu lösen, muss dort die Information aus den Randbedingungen einfließen, die entweder die Höhe oder den gesamten Randzu/ab-flussterm vorgeben.

- undurchlässiger Rand
- Rand mit Randzufluss
- Rand mit vorgegebener Standrohrspiegelhöhe

# Finite-Differenzen-Verfahren

Undurchlässiger Rand bzw. nicht-rechteckige Gebiete:

Ränderung des Modellgebietes mit Knoten der lokalen Transmissivität 0. Durch Verwendung des harmonischen Mittels wird die mittlere Transmissivität und der Zustrom aus dieser Zelle = 0.

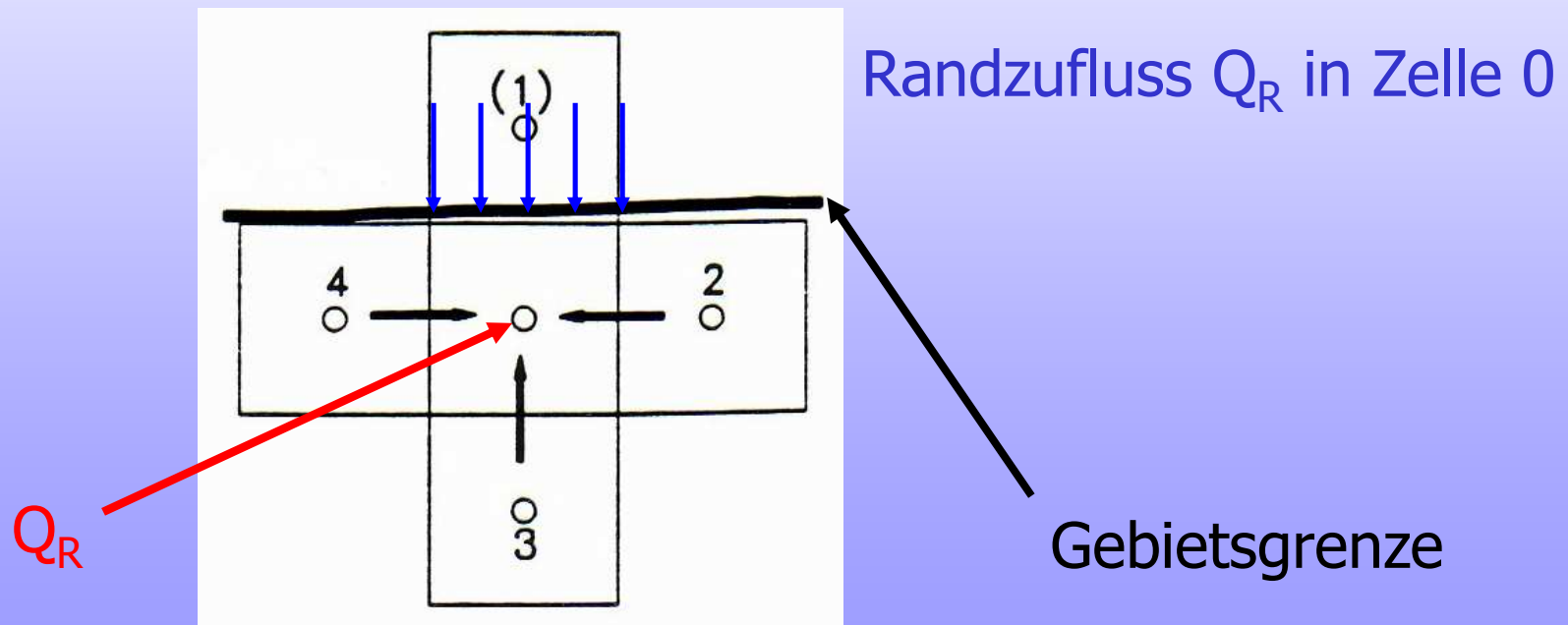




# Finite-Differenzen-Verfahren

## Zustromrand:

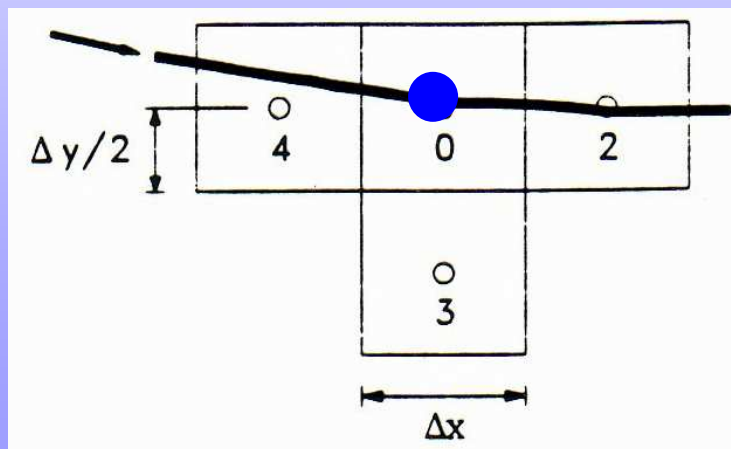
Wandle um in einen undurchlässigen Rand und addiere den Randzufluss  $Q_R$  zu Quellenterm  $Q_{i,j}$  der Zelle.



# Finite-Differenzen-Verfahren

## Rand mit vorgegebener Piezometerhöhe $h_R$ :

Liegt ein Randknoten mit vorgegebenem  $h_R$  innerhalb des Modellgebietes, entspricht der Wert von  $h_R$  der Lösung der Knotengleichung. Alternativ: sehr großer Speicherkoeffizient ( $S = 1 \cdot 10^{25}$ ), der die Zelle „unendlich“ viel Wasser speichern lässt.



← Rand mit vorgegebener Standrohrspiegelhöhe  $h_R$

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Der ungespannte Aquifer:

Für den ungespannten Aquifer wird die Knotengleichung grundsätzlich in gleicher Weise gelöst.

T ist eine Funktion von h und der Aquifersohle b:

$$T_{i,j} = kf_{i,j} (h_{i,j} - b_{i,j})$$

Die Standrohrspiegelhöhen  $h_{i,j}$  entsprechen den Höhen zur Zeit  $t+\Delta t$  in einem vollständig impliziten Schema, so dass die Differenzgleichung nach Einsetzen nichtlinear in  $h_{i,j}(t+\Delta t)$  werden und das System nur noch iterativ gelöst werden kann.

# Finite-Differenzen-Verfahren

Der halbgespannte („leaky“) Aquifer:

Der Austausch zwischen modelliertem Aquifer und externem Reservoir lautet:

$$Q_{i,j} = - k f_{i,j} (h_{i,j} - h_{\text{extern } i,j}) / d_{i,j}$$

mit Leakage-Faktor  $L_{i,j} = k f_{i,j} / d_{i,j}$

$Q_{i,j}$  Leakage kann direkt zu den  $q_{i,j}$  der Differenzgleichung addiert werden.

# Finite-Differenzen-Verfahren

## In- und Exfiltration von Oberflächengewässern:

in Analogie zum halbgespannten Aquifer:

$$Q_{i,j} = L_{i,j} (h_{i,j}^R - h_{i,j}) \quad \text{für } h_{i,j} > b_{i,j}^R$$

$$Q_{i,j} = L_{i,j} (h_{i,j}^R - b_{i,j}^R) \quad \text{für } h_{i,j} < b_{i,j}^R$$

mit Leakage-Faktor  $L_{i,j} = kf_{i,j} / d_{i,j}$

Wasserspiegel im Gewässer  $h_{i,j}^R$

Höhe der Gewässersohle  $b_{i,j}^R$

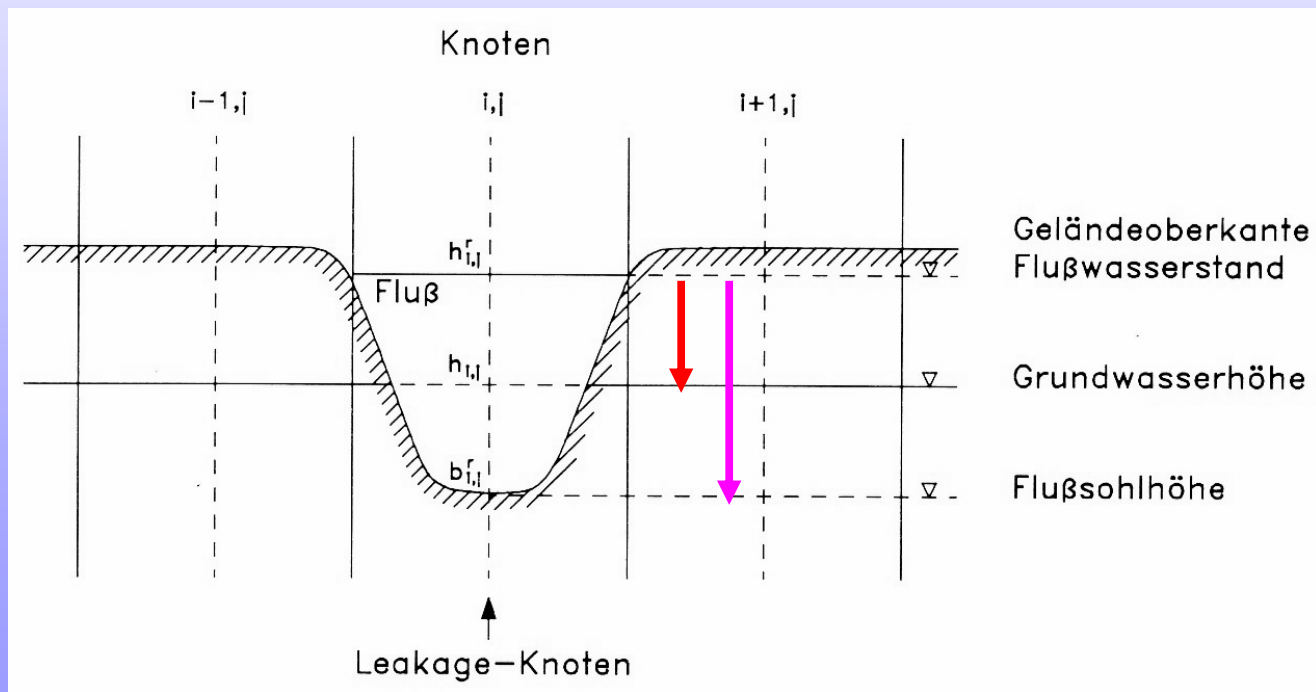
Fällt die Standrohrspiegelhöhe  $h_{i,j}$  unter die Gewässersohle, ist der Zufluss unabhängig von  $h_{i,j}$ . Die durchströmte Fläche  $A$  ist die gesamte Zellfläche oder ein Bruchteil.

# Finite-Differenzen-Verfahren

## In- und Exfiltration von Oberflächengewässern:

$$Q_{i,j} = L_{i,j} (h_{i,j}^R - h_{i,j}) \quad \text{für } h_{i,j} > b_{i,j}^R$$

$$Q_{i,j} = L_{i,j} (h_{i,j}^R - b_{i,j}^R) \quad \text{für } h_{i,j} < b_{i,j}^R$$



# Finite-Differenzen-Verfahren

Es bleibt ein System von maximal  $N_x \cdot N_y$  linearen Gleichungen, die zu lösen sind.

Wo liegt  $t'$  innerhalb des Betrachtungsintervalls  $(t, t+\Delta t)$ ?

Für  $t' = t$  ist  $h_{i,j}(t+\Delta t)$  die einzige Unbekannte in der Knotengleichung und das Gleichungssystem kann **explizit** nach  $h_{i,j}(t+\Delta t)$  aufgelöst werden.

Für  $t' = t+\Delta t$  erhält man ein System gekoppelter Gleichungen, welche die unbekanntes  $h_{i,j}(t+\Delta t)$  **implizit** enthalten.

Gewogenes Mittel  $h_{i,j}(t') = (1-\theta) h_{i,j}(t) + \theta h_{i,j}(t+\Delta t) \rightarrow$   
auch implizite Gl. (CRANK-NICHOLSON-Schema  $\theta = 0,5$ ).

# Finite-Differenzen-Verfahren

Die Standrohrspiegelhöhenverteilung  $h_{i,j}(t)$  zur Zeit  $t$  muss durch die Anfangsbedingungen bzw. das Berechnungsergebnis des vorhergehenden Zeitschrittes gegeben sein.

Im stationären Fall ist  $\partial h / \partial t = 0$ . Am einfachsten eliminiert man den Speicherterm in dem Gleichungssystem durch Null setzen.

Die Unbekannten sind dann die Standrohrspiegelhöhen  $h_{i,j}(t) = h_{i,j}(t + \Delta t)$ .

Das stationäre Gleichungssystem muss dann implizit gelöst werden.



# Finite-Differenzen-Verfahren

## Explizite Lösung des Gleichungssystems:

$$S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t + \Delta t) - h_{i,j}(t)}{\Delta t} =$$

$$TJ_{i,j-1} \frac{h_{i,j-1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + TI_{i,j} \frac{h_{i+1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} +$$

$$+ TJ_{i,j} \frac{h_{i,j+1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + TI_{i-1,j} \frac{h_{i-1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} + q_{i,j}$$

$t' = t$  setzen und nach  $h_{i,j}(t + \Delta t)$  auflösen ergibt:

$$h_{i,j}(t + \Delta t) = h_{i,j}(t) +$$

$$+ \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \left( TJ_{i,j-1} \frac{h_{i,j-1}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta y^2} + TI_{i,j} \frac{h_{i+1,j}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta x^2} + \right.$$

$$\left. + TJ_{i,j} \frac{h_{i,j+1}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta y^2} + TI_{i-1,j} \frac{h_{i-1,j}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta x^2} + q_{i,j} \right)$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Explizite Lösung des Gleichungssystems:

$$h_{i,j}(t + \Delta t) = h_{i,j}(t) + \frac{\Delta t}{S_{i,j}} \left( T J_{i,j-1} \frac{h_{i,j-1}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta y^2} + T I_{i,j} \frac{h_{i+1,j}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta x^2} + T J_{i,j} \frac{h_{i,j+1}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta y^2} + T I_{i-1,j} \frac{h_{i-1,j}(t) - h_{i,j}(t)}{\Delta x^2} + q_{i,j} \right)$$

Lösung des Gleichungssystems durch Einsetzen der Anfangsverteilung  $h_{i,j}(t_0)$  und direkter Berechnung von  $h_{i,j}(t_0 + \Delta t)$ .

Wiederholtes Einsetzen der Ergebnisse als neue Startwerte führt dann  $h_{i,j}$  zu jeder gewünschten Zeit.

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Explizite Lösung des Gleichungssystems:

Leicht zu programmieren, schnelle Berechnung möglich.

Um stabile Lösungen zu erzielen, muss  $\Delta t$  sehr klein gewählt werden.

Häufig unrealistisch kleine Zeitschrittlängen im Sekundenbereich.

Simulationszeiträume von mehreren Jahren werden damit äußerst zeitaufwendig.

Die Methode wird in der Praxis selten angewandt.

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

$$S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t + \Delta t) - h_{i,j}(t)}{\Delta t} =$$

$$TJ_{i,j-1} \frac{h_{i,j-1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + TI_{i,j} \frac{h_{i+1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} +$$

$$+ TJ_{i,j} \frac{h_{i,j+1}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta y^2} + TI_{i-1,j} \frac{h_{i-1,j}(t') - h_{i,j}(t')}{\Delta x^2} + q_{i,j}$$

$t' = (t + \Delta t)$  setzen und umformen ergibt:

$$h_{i-1,j}(t + \Delta t) \frac{TI_{i-1,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j-1}(t + \Delta t) \frac{TJ_{i,j-1}}{\Delta y^2} +$$

$$h_{i,j}(t + \Delta t) \left( -\frac{TI_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{TI_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{TJ_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \frac{TJ_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{S_{i,j}}{\Delta t} \right) +$$

$$h_{i+1,j}(t + \Delta t) \frac{TI_{i,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j+1}(t + \Delta t) \frac{TJ_{i,j}}{\Delta y^2} = -q_{i,j} - S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t)}{\Delta t}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Implizite Lösung des Gleichungssystems:

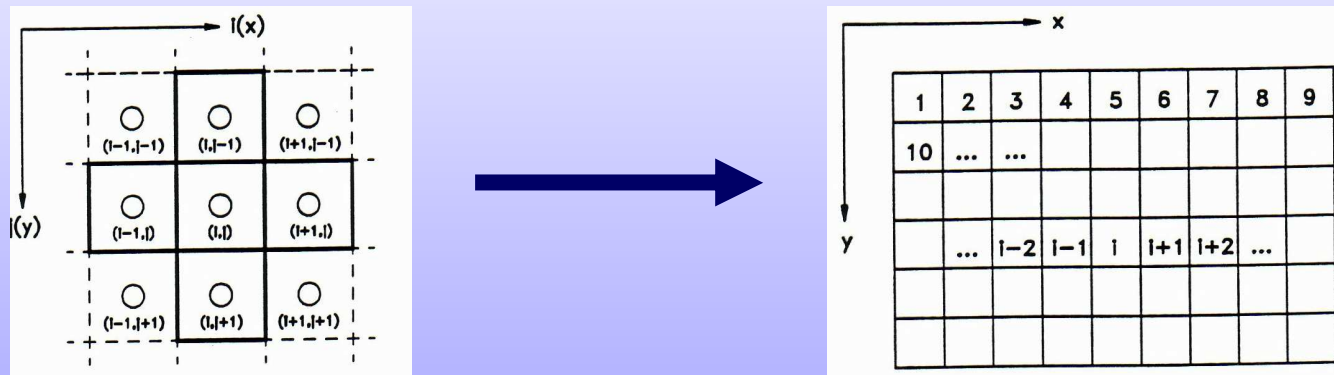
$$\begin{aligned}
 & h_{i-1,j}(t + \Delta t) \frac{T I_{i-1,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j-1}(t + \Delta t) \frac{T J_{i,j-1}}{\Delta y^2} + \\
 & \boxed{h_{i,j}(t + \Delta t)} \left( -\frac{T I_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T I_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{T J_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \frac{T J_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{S_{i,j}}{\Delta t} \right) + \\
 & h_{i+1,j}(t + \Delta t) \frac{T I_{i,j}}{\Delta x^2} + h_{i,j+1}(t + \Delta t) \frac{T J_{i,j}}{\Delta y^2} = -q_{i,j} - S_{i,j} \frac{h_{i,j}(t)}{\Delta t}
 \end{aligned}$$

Bei bekanntem  $h_{i,j}(t)$  ist dies ein gekoppeltes lineares Gleichungssystem für die unbekannten Standrohrspiegelhöhen  $h_{i,j}(t+\Delta t)$ .

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Die implizite Lösung wird durch eine Umindizierung der Doppel- in Einfachindices erleichtert:



$$(i, j) \rightarrow k = (j - 1)N_x + i$$

$$\rightarrow \sum_{l=1}^n a_{kl} h_l (t+\Delta t) = b_k$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Danach lässt sich das Gleichungssystem als Matrix ( $a_{kl}$ ) wie folgt schreiben:

Spalten l

→

Zeilen k

↓

$$\begin{aligned} a_{11}h_1 + a_{12}h_2 + \dots + a_{1n}h_n &= b_1 \\ a_{21}h_1 + a_{22}h_2 + \dots + a_{2n}h_n &= b_2 \\ &\dots\dots\dots \\ a_{n1}h_1 + a_{n2}h_2 + \dots + a_{nn}h_n &= b_n \end{aligned}$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Die Koeffizientenmatrix ( $a_{kl}$ ) ist eine symmetrische  $n \times n$ -Matrix mit  $n = N_x \cdot N_y$ .

Der größte Teil der Koeffizienten ist gleich Null.

In jeder Zeile  $k$  sind maximal 5 Elemente ungleich Null.

Dies sind die Koeffizienten  $a_{kl}$  von  $h_k$  und die Koeffizienten der vier  $h$  an den vier Nachbarknoten von des Knotens  $k$ .



# Finite-Differenzen-Verfahren

Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Werden die Knoten zeilenweise nummeriert, so sind die die Elemente:

$$a_{kk} = \frac{-T I_{i-1,j}}{\Delta x^2} - \frac{T I_{i,j}}{\Delta x^2} - \frac{T J_{i,j-1}}{\Delta y^2} - \frac{T J_{i,j}}{\Delta y^2} - \frac{S_{i,j}}{\Delta t},$$

$$a_{k,k+1} = \frac{T I_{i,j}}{\Delta x^2}, \quad a_{k,k-1} = \frac{T I_{i-1,j}}{\Delta x^2},$$

$$a_{k,k-N_x} = \frac{T J_{i,j-1}}{\Delta y^2}, \quad a_{k,k+N_x} = \frac{T J_{i,j}}{\Delta y^2}.$$

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Für einen Aquifer mit 3 X 3 Knoten ergibt sich eine symmetrische Koeffizientenmatrix der Form:

$$(a_{lk}) = \begin{pmatrix} x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \\ x & 0 & 0 & x & x & 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & x & x & x & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 & x & x & 0 & 0 & x \\ 0 & 0 & 0 & x & 0 & 0 & x & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & x & x & x \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & x & 0 & x & x \end{pmatrix}$$

X = Element ungleich Null

3 X 3 Zeilen k

3 X 3 Spalten l

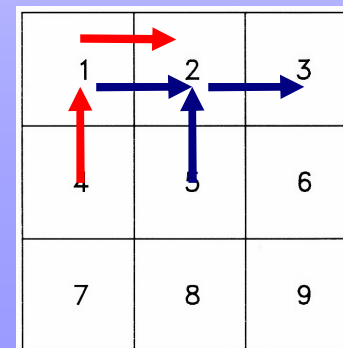
# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x & x & x & 0 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & x & 0 & 0 & x & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Zeile enthält die Koeffizienten der Knoten 1, 2 und 4 ungleich Null ---> Wasserfluss zwischen den Zellen 1-2 und 1-4.

2. Zeile enthält die Koeffizienten der Knoten 1, 2, 3 und 5 ungleich Null ---> Wasserfluss zwischen den Zellen 1-2, 2-3 und 5-2



# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Die Matrix hat eine sog. Bandstruktur (symmetrisch und Hauptdiagonale gleich Null).

Die Lösung des Gleichungssystems erfolgt durch Lösung der Matrixkoeffizienten mit direkten oder iterativen Verfahren.

Direkte Verfahren lösen das Gleichungssystem in einem Schritt und haben ein exaktes Ergebnis.

Nachteil: hoher Speicherbedarf und hohe Rechenzeit bei Problemen mit großer Knotenanzahl.

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Iterative Verfahren lösen das Gleichungssystem durch Einsetzen eines „geratenen“ Ergebnisses und sukzessive Verbesserung des Berechnungsergebnisses.

Vorteil: geringer Speicherbedarf und kurze Rechenzeit, geeignet für kleine Rechenanlagen und Probleme mit großer Knotenanzahl.

Verlangen eine Fehlerschranke zum Abbruch der Iteration.

Beschleunigung des Iterationsverfahrens durch sog. Relaxations- oder Beschleunigungsfaktoren (siehe SOR in MODFLOW).

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Implizite Lösung des Gleichungssystems:

Die bekanntesten Iterationsverfahren zur Lösung der Strömungsgleichung sind:

- GAUSS-SEIDEL-Verfahren
- IADI-Verfahren
- Verfahren der konjugierten Gradienten (PCG)

# Finite-Differenzen-Verfahren

## Explizite versus implizite Lösung des Gleichungssystems

### explizit

- Gleichungen werden Punkt für Punkt abgearbeitet
- Randbedingungen gesetzt oder extrapoliert
- Zeitschrittbeschränkung
- ein Zeitschritt wenig aufwendig, aber viele nötig

### implizit

- Gl. als Gleichungssystem formuliert
- Randbedingungen in Systemmatrix integriert
- keine Zeitschrittbeschränkung
- ein Zeitschritt aufwendig, aber nur wenige nötig