

Modul 6 Grundwasserhydrologie

Teil 2 Grundwasserströmungsberechnung

5. Grundwassermodell

„von Hand“

Prof. Dr. Ralph Watzel

**Regierungspräsidium Freiburg
Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau
Albertstraße 5
79104 Freiburg im Breisgau
ralph.watzel@rpf.bwl.de**

Grundwassermodell „von Hand“

Berechnung der stationären Grundwasserströmung im gespannten Aquifer

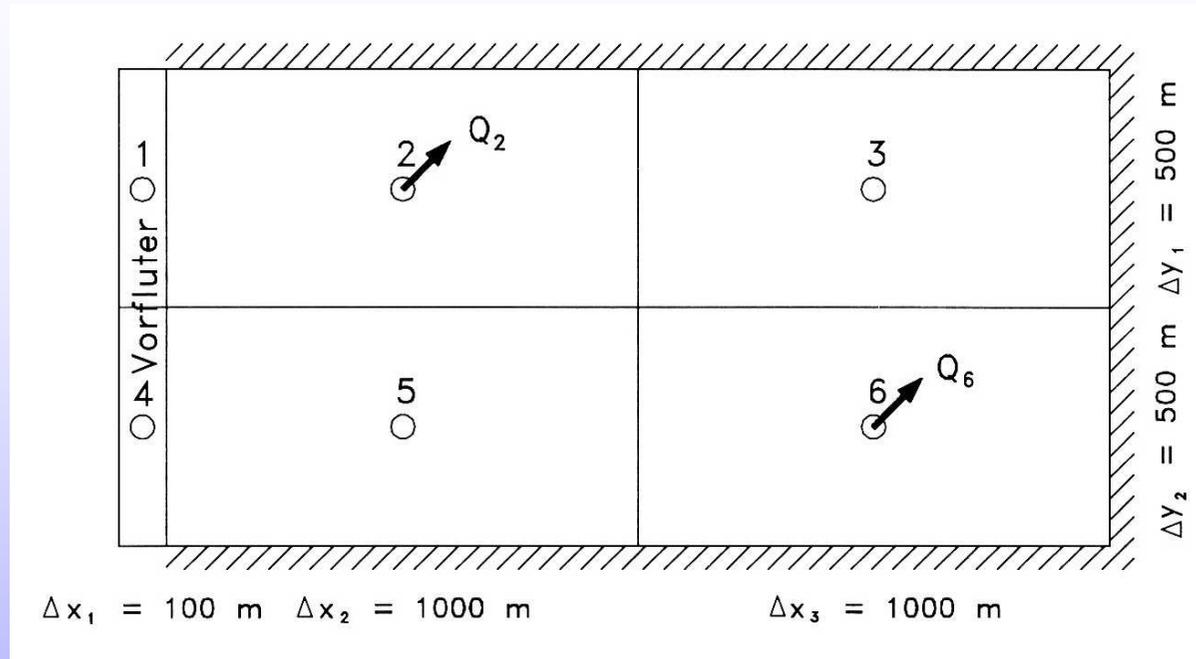
Einfaches numerisches Grundwassermodell ohne Computer berechnen (Beispiel aus Kinzelbach & Rausch 1995).

Vorgegebener Aquifer und Randbedingungen ---> siehe folgende Abbildung

Aufgabe: Berechne die stationäre Standrohrhöhenverteilung für den Aquifer.

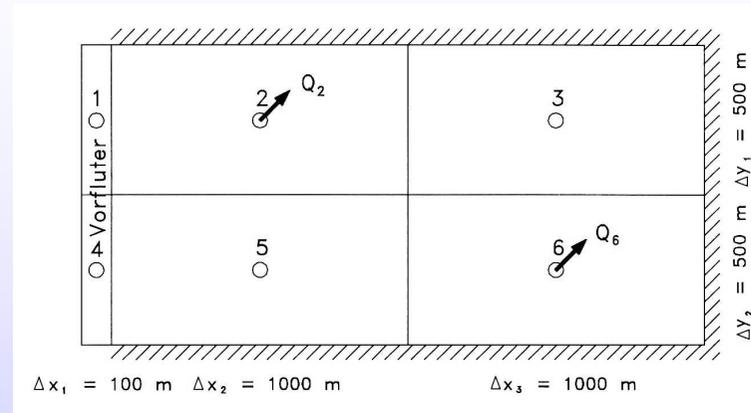
Frage: Besteht die Möglichkeit, dass Wasser aus dem Fluss in den Aquifer infiltriert und in die Brunnen gelangt?

Beispiel-Aquifer



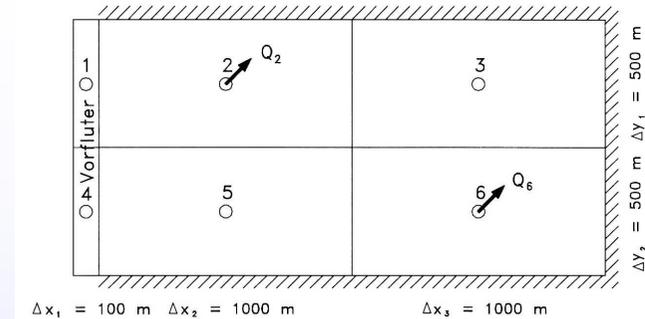
Besteht aus 6 Zellen mit variabler Zellabmessung
 undurchlässige Ränder im Norden, Osten und Süden
 Vorflut mit vollständigem hydraulischen Kontakt im Westen
 Wasserstand im Vorfluter beträgt konstant $10 \text{ m} + \text{NN}$

Beispiel-Aquifer



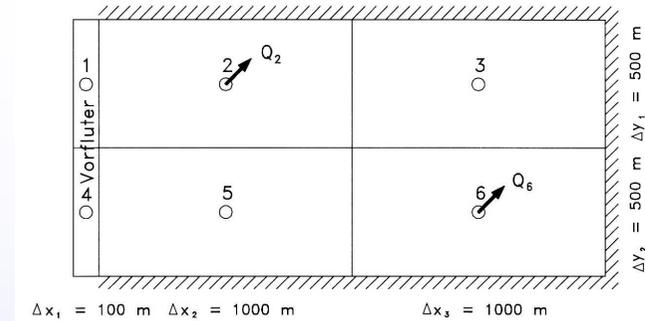
Aquifer wird näherungsweise als gespannt betrachtet
 Transmissivität für die Zellen 1-3 beträgt $T = 0,05 \text{ m}^2/\text{s}$
 und für die Zellen 4 bis 6 beträgt $T = 0,01 \text{ m}^2/\text{s}$
 Grundwasserneubildung im gesamten Gebiet 10 l/s km^2
 in Zelle 2 und 6 befindet sich jeweils ein Brunnen
 Entnahmerate für Brunnen 2 $Q_2 = -0,001 \text{ m}^3/\text{s}$
 Entnahmerate für Brunnen 6 $Q_6 = -0,005 \text{ m}^3/\text{s}$

Lösung (1)



1. Wasserbilanz für die einzelnen Zellen des Modellgebiets erstellen.
2. Wasserbilanzen für die Zellen 2, 3, 5 und 6 sind ausreichend.
3. Zellen 1 und 4 haben vorgegebene Piezometerhöhe und müssen nicht berechnet werden.
4. Aufstellen der Wasserbilanz wird am Beispiel der Zelle 2 erläutert.
5. Zu- und Abstrom in oder aus der Zelle kann nur im Austausch mit den Nachbarzellen 1, 5 und 3 erfolgen.

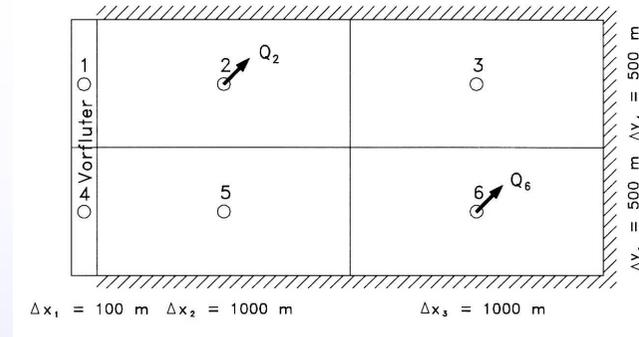
Lösung (2)



6. Über den nördlichen Rand erfolgt kein Wasseraustausch.
 7. Der Zustrom aus der Grundwasserneubildung ist zu berücksichtigen.
 8. Die Entnahme aus dem Brunnen 2 ist zu berücksichtigen.
 9. Da stationäre Verhältnisse betrachtet werden, tritt keine Speicherung auf. Die Summe aller Bilanzglieder = 0.
- Demgemäß lautet die Wasserbilanz für die Zelle 2:

$$\text{Zelle 2: } Q_{12} + Q_{52} + Q_{32} + Q_N + Q_2 = 0$$

Lösung (3)



10. Und entsprechend für die Zellen 3, 5 und 6:

$$\text{Zelle 3: } Q_{23} + Q_{63} + Q_N = 0$$

$$\text{Zelle 5: } Q_{45} + Q_{25} + Q_{65} + Q_N = 0$$

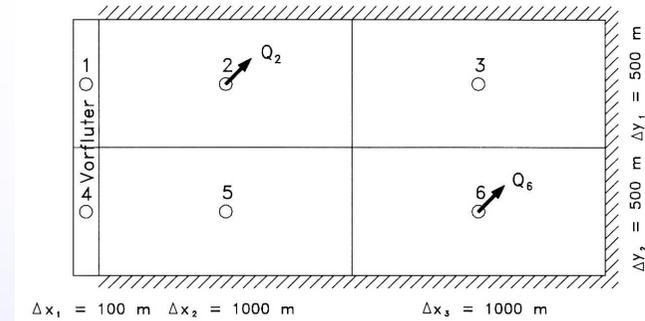
$$\text{Zelle 6: } Q_{56} + Q_{36} + Q_N + Q_6 = 0$$

Für jede Zelle gibt es eine Gleichung!

Ihre Breite ist von der Anzahl der zu bilanzierenden Wasserflüsse abhängig.

Welche Konsequenz folgt daraus?

Lösung (4)



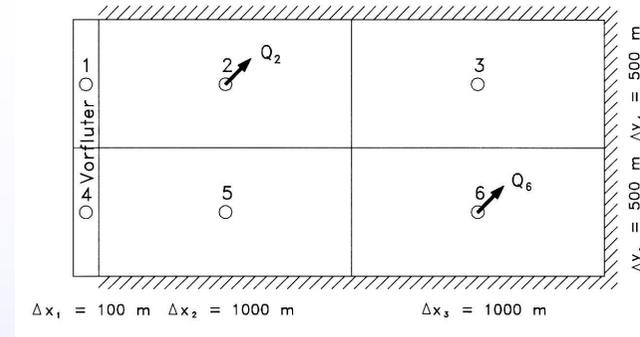
Im zweiten Schritt werden alle Flüsse zwischen Zellen mit Hilfe unbekannter Piezometerhöhen ausgedrückt.

Der Fluss über eine Seite ergibt sich aus der Filtergeschwindigkeit v_f multipliziert mit der durchströmten Fläche gemäß

$$Q = B \cdot m \cdot v_f = B \cdot m \cdot k_f \cdot i = B \cdot T \cdot i$$

mit Durchlässigkeitsbeiwert k_f , Transmissivität T , durchströmte Breite B , Aquifermächtigkeit m und hydraulischem Gradienten i zwischen den Zellen.

Lösung (5)



Für den Austausch zwischen Zellen 1 und 2 sind

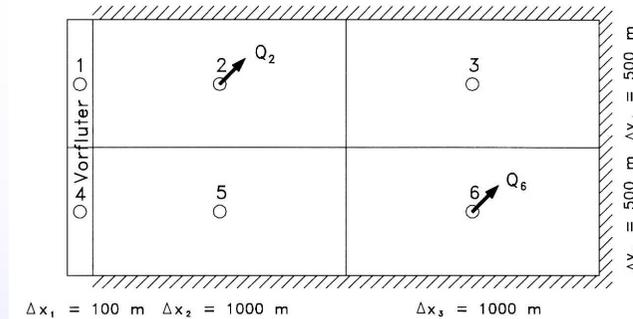
$$B = \Delta y_1$$

$$i = \frac{h_1 - h_2}{\frac{\Delta x_1}{2} + \frac{\Delta x_2}{2}}$$

T entspricht der mittleren Transmissivität T_{12} zwischen beiden Zellen. Das gewichtete harmonische Mittel ergibt

$$T_{12} = \frac{(\Delta x_1 + \Delta x_2) T_1 T_2}{T_1 \Delta x_2 + T_2 \Delta x_1}$$

Lösung (6)



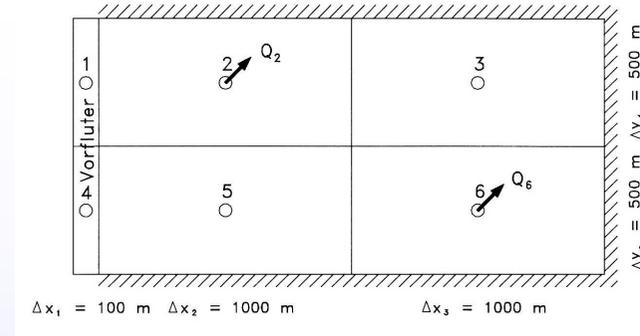
Für den Zu- und Abfluss von Zelle 1 nach Zelle 2 folgt damit

$$Q_{12} = T_{12} \cdot i \cdot \Delta y_1 = T_{12} \frac{h_1 - h_2}{\frac{\Delta x_1}{2} + \frac{\Delta x_2}{2}} \Delta y_1$$

Da T_1 und T_2 gleich sind, ist auch $T_{12} = 0,05 \text{ m}^2/\text{s}$. Daraus ergibt sich

$$Q_{12} = 0,05 \frac{10 - h_2}{\frac{100}{2} + \frac{1000}{2}} 500$$

Lösung (7)



Nach erfolgtem Ausmultiplizieren lautet die Gleichung für Q_{12} in m^3/s

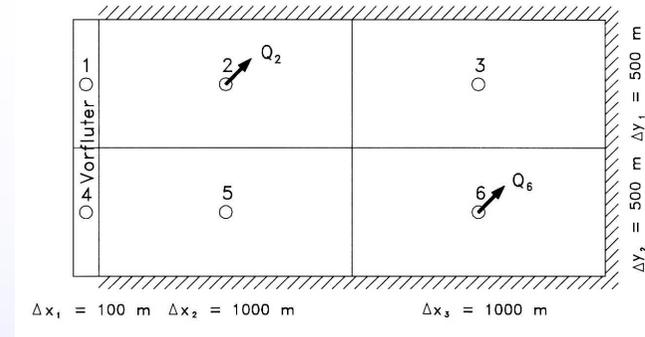
$$Q_{12} = 0,454545 - 0,045455 h_2$$

Auf die gleiche Art werden die Flüsse zwischen den Zellen 5 und 2 sowie den Zellen 3 und 2 berechnet

$$Q_{52} = 0,033333 h_5 - 0,033333 h_2$$

$$Q_{32} = 0,025000 h_3 - 0,025000 h_2$$

Lösung (8)



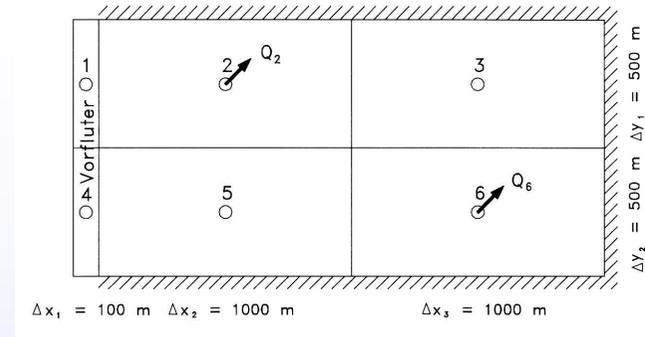
Zur Berechnung von Q_N ist die Grundwasserneubildungsrate noch mit der Fläche der Zelle zu multiplizieren

$$Q_N = G_{W_{\text{neu}}} \cdot \Delta x_2 \cdot \Delta y_1 = 1 \cdot 10^{-8} \cdot 1000 \cdot 500 = 0,005 \text{ m}^3/\text{s}$$

Die Entnahmerate durch den Brunnen beträgt $Q_2 = -0,001 \text{ m}^3/\text{s}$. Setzt man die einzelnen Terme in die Bilanzgleichung für Zelle 2 ein, so erhält man

$$0,458545 - 0,103788 h_2 + 0,025000 h_3 + 0,033333 h_5 = 0$$

Lösung (9)



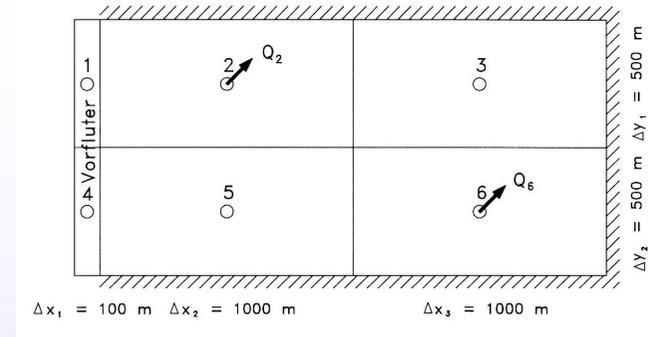
Auf diese Weise ergeben sich für die Zellen 3, 5 und 6 die Bilanzgleichungen

$$\text{Zelle 3: } 0,005000 + 0,025000 h_2 - 0,058333 h_3 + 0,033333 h_6 = 0$$

$$\text{Zelle 5: } 0,095909 + 0,033333 h_2 - 0,047424 h_5 + 0,005000 h_6 = 0$$

$$\text{Zelle 6: } 0,000000 + 0,033333 h_3 + 0,005000 h_5 - 0,038333 h_6 = 0$$

Lösung (10)

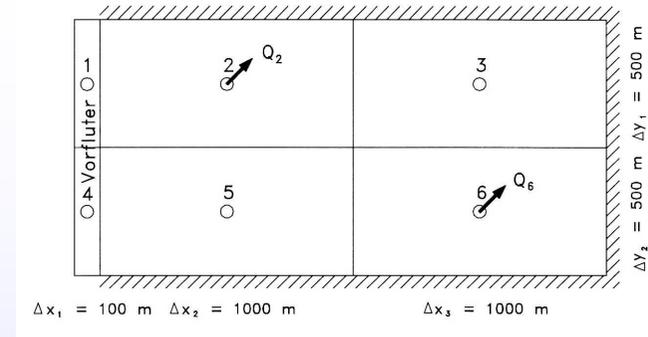


Für die unbekanntes Piezometerhöhen h_2 , h_3 , h_5 und h_6 existieren somit 4 Gleichungen, die in der folgenden einheitlichen Form geschrieben werden können

$$\begin{aligned}
 -0,103788 h_2 + 0,025000 h_3 + 0,033333 h_5 + 0,000000 h_6 &= -0,458545 \\
 0,025000 h_2 - 0,058333 h_3 + 0,000000 h_5 + 0,033333 h_6 &= -0,005000 \\
 0,033333 h_2 + 0,000000 h_3 - 0,047424 h_5 + 0,005000 h_6 &= -0,095909 \\
 0,000000 h_2 + 0,033333 h_3 + 0,005000 h_5 - 0,038333 h_6 &= 0,000000
 \end{aligned}$$

Für jede Zelle ergibt sich eine lineare Gleichung!

Lösung (11)



Für die Lösung des linearen Gleichungssystems stehen unterschiedliche Methoden zur Verfügung. Hier soll das Gleichungssystem iterativ nach dem GAUSS-SEIDEL-Verfahren gelöst werden. Hierzu werden die Gleichungen umgestellt.

$$h_2 = 0,240876 h_3 + 0,321164 h_5 + 4,418093$$

$$h_3 = 0,428574 h_2 + 0,571426 h_6 + 0,085715$$

$$h_5 = 0,702872 h_2 + 0,105432 h_6 + 2,022373$$

$$h_6 = 0,869564 h_3 + 0,130436 h_5$$

Lösung (12)

$$h_2 = 0,240876 h_3 + 0,321164 h_5 + 4,418093$$

$$h_3 = 0,428574 h_2 + 0,571426 h_6 + 0,085715$$

$$h_5 = 0,702872 h_2 + 0,105432 h_6 + 2,022373$$

$$h_6 = 0,869564 h_3 + 0,130436 h_5$$

Diese Form des Gleichungssystems kann als Iterationsvorschrift aufgefasst werden.

Nach Einsetzen von Schätzwerten für h_2 , h_3 , h_5 und h_6 auf der rechten Seite dieses Gleichungssystems erhält man verbesserte Werte.

Als Startwert für die Iteration wird jeweils eine Piezometerhöhe von 10 m+NN eingesetzt.

Die Werte für h_3 und h_5 werden in die erste Gleichung eingesetzt und daraus ein neues h_2 berechnet.

Der neue Wert von h_2 wird mit dem geschätzten Wert von h_6 in die zweite Gl. eingesetzt und ein neues h_3 berechnet.

Lösung (13)

$$h_2 = 0,240876 h_3 + 0,321164 h_5 + 4,418093$$

$$h_3 = 0,428574 h_2 + 0,571426 h_6 + 0,085715$$

$$h_5 = 0,702872 h_2 + 0,105432 h_6 + 2,022373$$

$$h_6 = 0,869564 h_3 + 0,130436 h_5$$

Auf die gleiche Weise werden h_5 und h_6 aus der dritten und vierten Gleichung bestimmt.

Mit den Ergebnissen wird diese Prozedur so lange wiederholt, bis die Differenz zwischen alten und neuen Piezometerhöhen ein vorgegebenes Abbruchkriterium unterschreitet.

In der nachfolgenden Tabelle sind die Werte der Piezometerhöhen den jeweiligen Iterationsschritten zugeordnet.

Man erkennt, dass bei einem Abbruchkriterium von 0,01 nach 21 Iterationen Konvergenz erreicht wurde.

Lösung (14)

| | 1. Iteration | 2. Iteration | 3. Iteration | | 20. Iteration | 21. Iteration | 22. Iteration |
|-------|-----------------|-----------------|-----------------|------|------------------|------------------|------------------|
| h_2 | 10,04 | 10,11 | 10,15 | | 10,24 | 10,24 | 10,24 |
| h_3 | 10,10 | 10,19 | 10,26 | | 10,42 | 10,43 | 10,43 |
| h_5 | 10,13 | 10,19 | 10,23 | | 10,32 | 10,32 | 10,32 |
| h_6 | 10,11 | 10,19 | 10,25 | | 10,41 | 10,41 | 10,41 |

Zusammenfassung (1)

- Die numerische Lösung der Strömungsgleichung (hier FD-Verfahren) basiert auf den Wasserbilanzen für jede einzelne Zelle.
- Zu diesem Zweck werden die Flüsse aus benachbarten Zellen als Funktion der unbekannten Piezometerhöhen ausgedrückt.
- Dabei werden n lineare Gleichungen aus den Wasserbilanzen (unbekannte Piezometerhöhen) für n diskretisierte Zellen erzeugt.
- Die Breite der Gleichungen ist von der Anzahl der zu bilanzierenden Wasserflüsse abhängig.

Zusammenfassung (2)

- Zur iterativen Lösung des linearen Gleichungssystems sind Anfangswerte (initial heads) und ein Abbruchkriterium erforderlich.
- Die Modell-Wasserbilanz ist ausgeglichen.
- Das Berechnungsergebnis sind Piezometerhöhen für jede einzelne Zelle.
- Aus der Piezometerhöhenverteilung und den vorgegebenen k_f - bzw. T-Werten und Geometrien lassen sich im Modellgebiet für beliebige Querschnitte Volumenflüsse und Bilanzglieder errechnen.