

# **Modul 6 Grundwasserhydrologie**

## **Teil 2 Grundwasserströmungsberechnung**

# **6. Particle Tracking, Bahnlinien** **und Isochronen**

**Prof. Dr. Ralph Watzel**

**Regierungspräsidium Freiburg**  
**Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau**  
**Albertstraße 5**  
**79104 Freiburg im Breisgau**  
**[ralph.watzel@rpf.bwl.de](mailto:ralph.watzel@rpf.bwl.de)**

# Particle Tracking

Rein advektiver Stofftransport stellt die mittlere Stoffbewegung im Aquifer dar.

Oft reicht ihre Kenntnis zur Lösung praktischer Aufgaben aus.

Ist anwendbar, bei folgenden Betrachtungen:

- Richtung des Stofftransports und Bahnen von Fronten
- Schwerpunkte von Konzentrationsverteilungen
- mittlere Lauf- bzw. Ankunftszeiten

# Particle Tracking

Man spricht auch von einer dispersionsfreien Näherung. Praktische Probleme, die mit dieser Betrachtung gelöst werden können:

- Bestimmung von Stromlinien
- Bestimmung des Einzugsgebiets einer Grundwasserfassung
- Entwurf von hydraulischen Abwehr- und Sanierungsmaßnahmen

# Particle Tracking

## 2D-horizontale Grundwasserströmung

Gleichung einer Bahnlinie bezogen auf die Abstandsgeschwindigkeit lautet:

$$dx(t)/dt = v_{ax} ; dy(t)/dt = v_{ay}$$

# Particle Tracking

Lösung der Bahngleichung setzt die Kenntnis des heterogenen Strömungsfeldes ( $v_{ax}$ ,  $v_{ay}$ ) voraus.

Integration liefert den Ort eines Partikels zur Zeit  $t$  vom Startpunkt  $(x_0, y_0)$  zur Zeit  $t_0$  aus:

$$x(t) = x_0 + \int_{t_0}^t v_{ax}(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^t v_{ay}(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

# Particle Tracking

Durch Inversion der Geschwindigkeiten kann auch eine Partikelbahn rückwärts in der Zeit konstruiert werden, die zur Zeit  $t$  in einem vorgegebenen Punkt  $(x, y)$  endet:

$$x(t) = x - \int_t^{t_0} v_{ax}(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

$$y(t) = y - \int_t^{t_0} v_{ay}(x(\tau), y(\tau), \tau) d\tau$$

# Particle Tracking

Die Integrale werden numerisch gelöst:

$$x(t+\Delta t) = x(t) \pm \{v_{ax}(x(t),y(t),t)\} \Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) \pm \{v_{ay}(x(t),y(t),t)\} \Delta t$$

Eine Schrittlängensteuerung verhindert, dass innerhalb eines Zeitschritts zu große Weglängen zurückgelegt werden.

# Particle Tracking

Die Bahnlinien sind von den Verteilungen der Durchlässigkeit  $k_f$ , des durchflusswirksamen Porenvolumens  $n_{\text{eff}}$  und der Standrohrspiegelhöhe  $h$  bzw. dem Gradienten  $I$  abhängig.

Alle drei/vier Größen können im heterogenen Aquifer als verteilte Größen vorliegen.

Unterschied:  $h$ ,  $I$ ,  $k_f$  sowie  $n_{\text{eff}}$  ?

(Skalar - Vektor, vorgegeben – berechnet)



# Particle Tracking Schrittlängen- steuerung

$$V_{ax,ay} = k_{fx,y} \cdot I_{x,y} / n_{eff}$$

$$x(t+\Delta t) = x(t) \pm v_{ax}(x(t),y(t),t) \cdot \Delta t$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) \pm v_{ay}(x(t),y(t),t) \cdot \Delta t$$

$x(t)$   
 $y(t)$

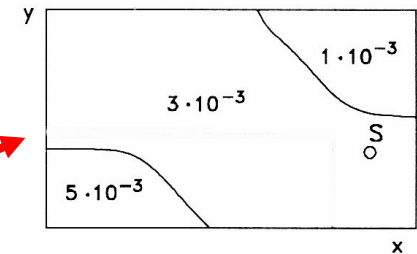
$k_f$

$n_f$

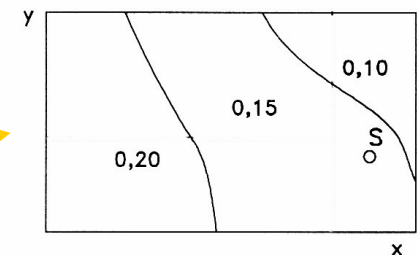
$x$   
 $y$

$u_x$   
 $u_y$

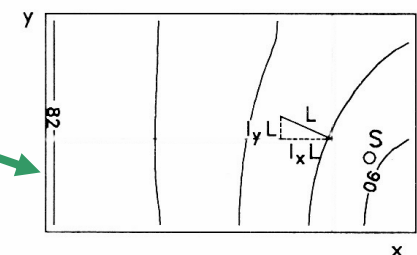
$x(t+\Delta t)$   
 $y(t+\Delta t)$



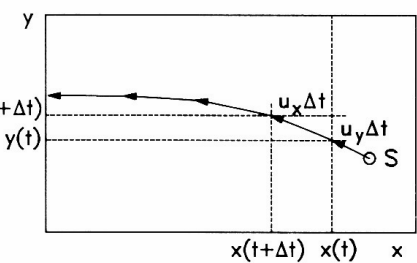
Kartierung der Durchlässigkeit  $k_f$  [m/s]



Kartierung des durchflußwirksamen Porenvolumens  $n_f$



Piezometerhöhenverteilung [m]



Mittlere Bahnlinie ausgehend vom Schadensherd S

# Particle Tracking

Außer dem Verlauf der Bahnlinien interessiert die Laufzeit  $\tau_{12}$  eines Teilchens zwischen zwei beliebigen Punkten  $(x_1, y_1)$  und  $(x_2, y_2)$ :

$$\tau_{12} = \int_{x_1}^{x_2} 1/v_{ax} dx = \int_{y_1}^{y_2} 1/v_{ay} dy$$

$$T_{12} = \pm 1/v_{ax} (x(t), y(t), t) \cdot \Delta x = \pm 1/v_{ay} (x(t), y(t), t) \cdot \Delta y$$

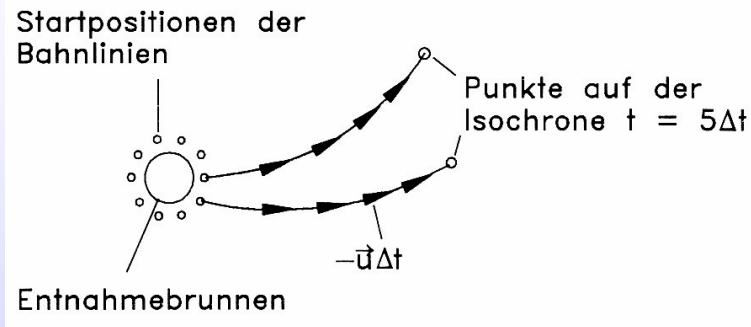
Damit können mittlere Laufzeiten von einem Punkt  $(x, y)$  im Einzugsgebiet eines Brunnens bestimmt werden.

Linien gleicher mittlerer Laufzeit = Isochronen.

# Particle Tracking

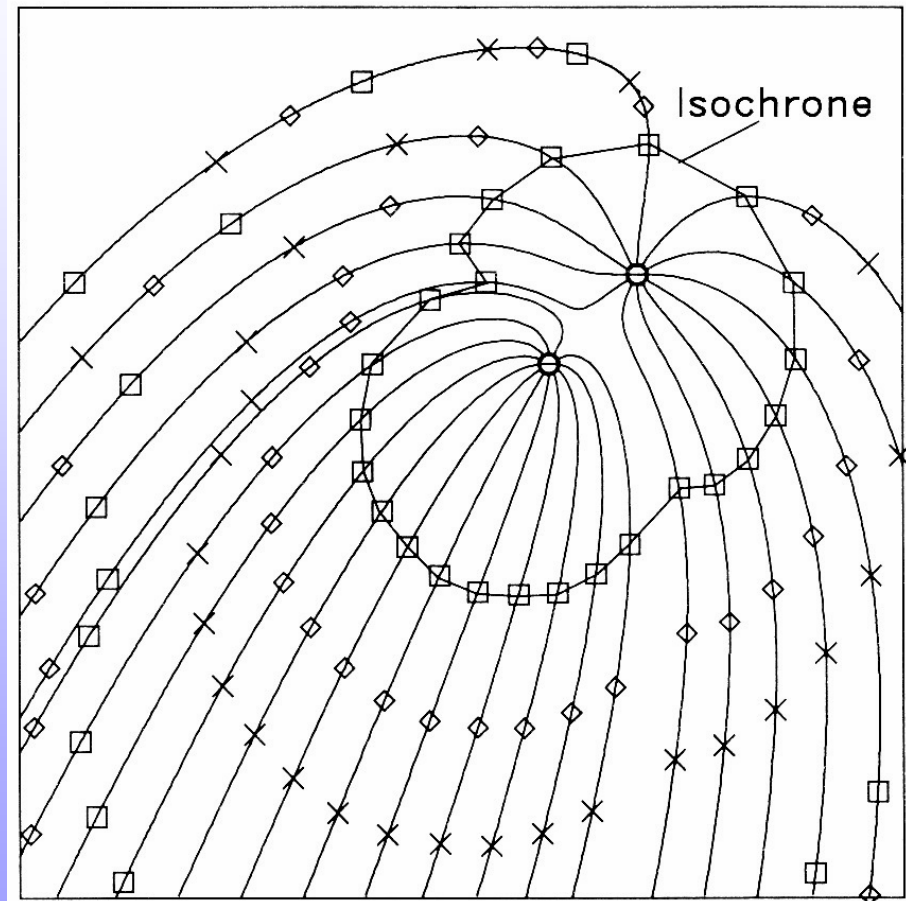
- Isochronen sind Linien gleicher Laufzeit. Welche praktische Anwendung finden sie?
- Zur Bestimmung von Isochronen wird eine Zahl von Startpunkten auf einem Brunnenrand plaziert und deren Rückwärtsbahnen für  $n \cdot \Delta t$  berechnet.
- Sobald auf einer Bahn die berechnete Laufzeit  $t = n \cdot \Delta t$  erreicht ist, wird der Punkt markiert.

# Particle Tracking



Prinzip der Isochronenberechnung

Bahnlinien und Isochronen in einem Strömungsfeld mit zwei Brunnen



# Particle Tracking -Verfahren

Die Konstruktion der Bahnlinien erfordert ein Geschwindigkeitsfeld, das an jedem Punkt  $(x,y)$  definiert ist.

Das numerische Strömungsmodell liefert jedoch nur  $h_{i,j}$ , die einen repräsentativen Wert für das Zentrum der Zelle darstellen!

Daraus wird  $v_{ax,ay}$  auf der Zellgrenze berechnet.

# Particle Tracking

## Lösung PRICKETT-Verfahren:

Die Geschwindigkeit an einem beliebigen Punkt  $(x,y)$  wird durch Interpolation der durch ein Differenzenmodell bestimmten Geschwindigkeiten zwischen den Zellen erzeugt.

Verfahren ist aufwendig, liefert aber auch in stark diverg./konverg. Feldern gute Ergebnisse.

# Particle Tracking

## Lösung PRICKETT-Verfahren:

Verfahrensschwäche:

Durchlässigkeitskontraste und undurchlässige Ränder werden durch Mittelung über Zellgrenzen hinweg „aufgeweicht“ bzw. geglättet.

# Particle Tracking

## Lösung POLLOCK-Verfahren:

Analytische Lösung für die Bahnlinie innerhalb einer Zelle.

Durchlässigkeitskontraste werden nicht

„aufgeweicht“, Geometrie bleibt streng erhalten.

Verfahren liefert in stark diverg./konverg. Feldern teilweise ungenaue Ergebnisse.



# Particle Tracking (In)sationarität

## Stationäre / Instationäre Bahnlinien:

Mit diesen Verfahren werden Bahnlinien durch Integration des aus der h-Verteilung gewonnenen stationären Geschwindigkeitsfeldes erzeugt.

Die Bahnlinienberechnung im instationären Strömungsfeld ist außerordentlich aufwendig (2 unterschiedliche Zeitschrittlängen kombinieren).