

Modul 12 Stoffhaushalt und Stofftransport

Teil 2 Advektions-Dispersions-Modell und numerische Behandlung

12. Allgemeine Transportgleichung – numerische Lösungsverfahren

Prof. Dr. Ralph Watzel

**Regierungspräsidium Freiburg
Landesamt für Geologie, Rohstoffe und Bergbau
Albertstraße 5
79104 Freiburg im Breisgau
ralph.watzel@rpf.bwl.de**

Numerische Lösungen

Die verwendeten Schemata und Abbildungen folgen im wesentlichen folgenden Lehrbücher:

KINZELBACH, W. (1992): Numerische Methoden zur Modellierung des Transports von Schadstoffen im Grundwasser, Oldenbourg Verlag, München, 343 S.

KINZELBACH, W. & RAUSCH, R. (1995): Grundwassermodellierung – Eine Einführung mit Übungen, Borntraeger, Berlin, Stuttgart, 283 S.

RAUSCH, R., SCHÄFER, W. & WAGNER, CH. (2002): Einführung in die Transportmodellierung im Grundwasser, Borntraeger, Berlin, Stuttgart, 183 S.

Numerische Lösungen

Aufgrund des hyperbolisch-parabolischen Charakters der Transportgleichung sind weder Euler- noch Lagrange-Verfahren optimal zur Lösung geeignet.

- reine Euler-Verfahren (FD, TVD)
- gemischte Euler-Lagrange-Verfahren (MOC)

lösen den advektiven Teil mit dem MOC, den dispersiven mit den FD-Verfahren

Finite-Differenzen-Verfahren

Vorgehen analog zur FD-Lösung der Strömungsgl.
Differentialquotienten werden für diskretes Gitter
durch Differenzenquotienten ersetzt.

Bilanz der Stoffmasse für jede Zelle und jeden
Zeitschritt ($t, t+\Delta t$) – räumliches und zeitliches
Kontinuum werden in diskrete Schritte aufgeteilt.

$$\frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{\Delta c}{\Delta x} = \frac{c_2 - c_1}{x_2 - x_1}$$

$$\frac{\partial c}{\partial t} \approx \frac{\Delta c}{\Delta t} = \frac{c_2 - c_1}{t_2 - t_1}$$

Finite-Differenzen-Verfahren

Vorab wurde auf dem gleichen Gitter eine eine Strömungsberechnung durchgeführt ($v_{ai,j}$, $u_{i,j}$).

Die Bilanzen der Massenveränderung werden für jede Zellfläche und für advektiven wie dispersiven Anteil sowie für die Speicherung und externe Quellen/Senken in Differenzenquotienten aufgestellt.

Die Bilanzgrößen werden durch unbekannte Konzentrationen $C_{i,j}$ ausgedrückt.

Systemparameter/Randbed. werden zellenweise zugewiesen.

Aus n Bilanzen entstehen mit Startkonzentration $C_{i,j}(t)$ und Randbedingungen n Gleichungen für unbekannte $C_{i,j}(t+\Delta t)$, Lösung mit üblichen Verfahren.

2D-FD-Verfahren ausführlich

Gelöst werden soll folgende Differentialgleichung:

$$\frac{\partial (n_e c)}{\partial t} = - \frac{\partial (u_x n_e c)}{\partial x} - \frac{\partial (u_y n_e c)}{\partial y} + \frac{\partial \left(D_{xx} n_e \frac{\partial c}{\partial x} + D_{xy} n_e \frac{\partial c}{\partial y} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(D_{yy} n_e \frac{\partial c}{\partial y} + D_{yx} n_e \frac{\partial c}{\partial x} \right)}{\partial y} + \sigma$$

Der Dispersionstensor kann wie folgt dargestellt werden:

$$D_{xx} = \alpha_l \frac{u_x^2}{u} + \alpha_t \frac{u_y^2}{u}$$

$$D_{yy} = \alpha_t \frac{u_x^2}{u} + \alpha_l \frac{u_y^2}{u}$$

$$D_{xy} = D_{yx} = (\alpha_l \ \alpha_t) \frac{u_x u_y}{u}$$

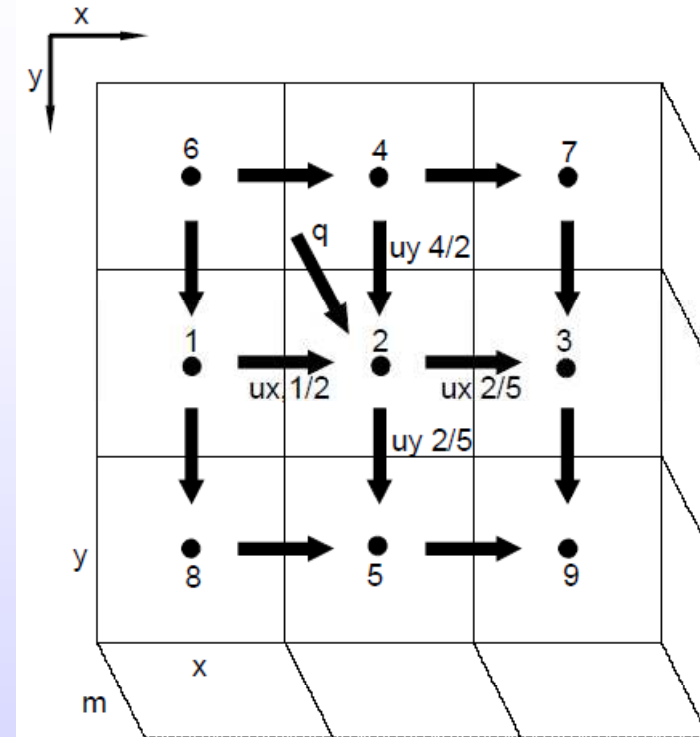
$$u = |u| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Massenbilanz für den 2D-Fall:

Massenspeicherung am Knoten 2
bzw. in Zelle 2:

$$\Delta S_2 = \frac{c_2(t + \Delta t) - c_2(t)}{\Delta t} \Delta x_2 \Delta y_2 m_2 n_{e,2}$$



2D-FD-Verfahren ausführlich

Advective Flüsse für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

$$a_{x1/2} = \underline{u_{x1/2} n_{e1/2} c_{1/2}} \underline{\Delta y_{1/2} m_{1/2}}$$

$$a_{x2/3} = u_{x2/3} n_{e2/3} \underline{c_{2/3}} \Delta y_{2/3} m_{2/3}$$

$$a_{y4/2} = u_{y4/2} n_{e4/2} \underline{c_{4/2}} \Delta x_{4/2} m_{4/2}$$

$$a_{y2/5} = u_{y2/5} n_{e2/5} \underline{c_{2/5}} \Delta x_{2/5} m_{2/5}$$

Änderung der advektiven Flüsse für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

$$\Delta a_{x2} = a_{x2/3} - a_{x1/2} = u_{x2/3} n_{e2/3} c_{2/3} \Delta y_{2/3} m_{2/3} - u_{x1/2} n_{e1/2} c_{1/2} \Delta y_{1/2} m_{1/2}$$

$$\Delta a_{y2} = a_{y2/5} - a_{y4/2} = u_{y2/5} n_{e2/5} c_{2/5} \Delta x_{2/5} m_{2/5} - u_{y4/2} n_{e4/2} c_{4/2} \Delta x_{4/2} m_{4/2}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Beim sog. **upwind**-Verfahren (Rückwärtsdifferenzen) wird für $c_{1,2}$ die Konzentration c_1 , für $c_{4,2}$ die Konzentration c_4 verwendet.

Bei der **zentralen** Gewichtung wird für $c_{1,2}$ das arithmetische Mittel aus c_1 und c_2 , für $c_{4,2}$ das arithmetische Mittel aus c_4 und c_2 verwendet.

Massenänderung in Zusammenhang mit einer Wasserzugabe bzw. –entnahme am Knoten 2 bzw. Zelle 2:

$$\Delta q_2 = w_2 \Delta x_2 \Delta y_2 m_2 (c_z - c)$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Dispersive Flüsse für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

Hauptkomponenten (dispersiver Fluss in x, y durch Konz.gradient in x, y)

$$d_{xx\ 1/2} = \underline{D_{xx\ 1/2}} \frac{c_2 - c_1}{\Delta x_{1/2}} \Delta y_{1/2} n_{e1/2} m_{1/2}$$

$$d_{xx\ 2/3} = \underline{D_{xx\ 2/3}} \frac{c_3 - c_2}{\Delta x_{2/3}} \Delta y_{2/3} n_{e2/3} m_{2/3}$$

$$d_{yy\ 4/2} = \underline{D_{yy\ 4/2}} \frac{c_2 - c_4}{\Delta y_{4/2}} \Delta x_{4/2} n_{e4/2} m_{4/2}$$

$$d_{yy\ 2/5} = \underline{D_{yy\ 2/5}} \frac{c_5 - c_2}{\Delta y_{2/5}} \Delta x_{2/5} n_{e2/5} m_{2/5}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Dispersive Flüsse für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

Nebenkomponenten (dispersiver Fluss in x durch Konz.gradient in y)

Bestimmung der wirksamen Konzentrationsgradienten in y-Richtung mittels:

$$\begin{aligned}\Delta c_{xy1/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_8 - c_6}{\Delta y_{6/1} + \Delta y_{1/8}} + \frac{c_5 - c_4}{\Delta y_{4/2} + \Delta y_{2/5}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_8 - c_6 + c_5 - c_4}{\Delta y_{6/1} + \Delta y_{1/8}} \right) \\ \Delta c_{xy2/3} &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_5 - c_4 + c_9 - c_7}{\Delta y_{6/1} + \Delta y_{1/8}} \right)\end{aligned}$$

Die Flüsse ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}d_{xy1/2} &= \underline{D_{xy1/2}} \Delta c_{xy1/2} \Delta y_{1/2} n_{e1/2} m_{1/2} \\ d_{xy2/3} &= \underline{D_{xy2/3}} \Delta c_{xy2/3} \Delta y_{2/3} n_{e2/3} m_{2/3}\end{aligned}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Dispersive Flüsse für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

Nebenkomponenten (dispersiver Fluss in y durch Konz.gradient in x)

Bestimmung der wirksamen Gradienten in x-Richtung mittels:

$$\begin{aligned}\Delta c_{yx4/2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_7 - c_6}{\Delta x_{6/4} + \Delta x_{4/7}} + \frac{c_3 - c_1}{\Delta x_{1/2} + \Delta x_{2/3}} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_7 - c_6 + c_3 - c_1}{\Delta y_{6/4} + \Delta y_{4/7}} \right) \\ \Delta c_{yx2/5} &= \frac{1}{2} \left(\frac{c_3 - c_1 + c_9 - c_8}{\Delta y_{6/4} + \Delta y_{4/7}} \right)\end{aligned}$$

Die Flüsse ergeben sich zu:

$$\begin{aligned}d_{yx4/2} &= \underline{D}_{yx4/2} \Delta c_{yx4/2} \Delta x_{4/2} n_{e4/2} m_{4/2} \\ d_{yx2/5} &= \underline{D}_{yx2/5} \Delta c_{yx2/5} \Delta x_{2/5} n_{e2/5} m_{2/5}\end{aligned}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

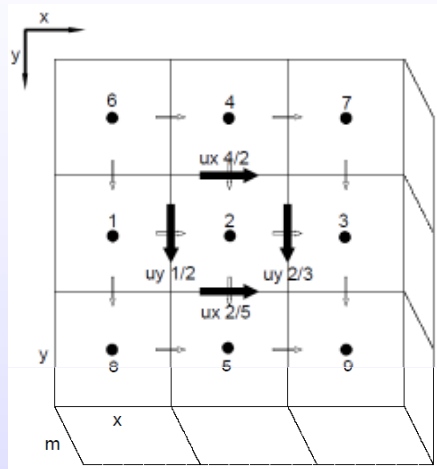
Gesamtänderung des dispersiven Flusses für Knoten 2 bzw. Zelle 2:

$$\Delta d_{x,2} = d_{xx\ 2/3} - d_{xx\ 1/2} + d_{xy\ 2/3} - d_{xy\ 1/2}$$
$$\Delta d_{y,2} = d_{yy\ 2/5} - d_{yy\ 4/2} + d_{yx\ 2/5} - d_{yx\ 4/2}$$

Zur Bestimmung der Dispersionskoeffizienten sind neben den Hauptkomponenten der Geschwindigkeit (v_a , u), die unmittelbar aus der Strömungsberechnung folgen, auch die Nebenkomponenten notwendig. Diese müssen aus den umgebenden Hauptkomponenten gemittelt werden:

2D-FD-Verfahren ausführlich

Hauptkomponenten der Dispersionskoeffizienten X-Richtung:



$$D_{xx,1/2} = \frac{\alpha_l u_{x,1/2} + \alpha_t u_{y,1/2}}{u}$$

$$u_{y,1/2} = \frac{u_{y,6/1} + u_{y,4/2} + u_{y,1/8} + u_{y,2/5}}{4}$$

$$u = \sqrt{u_{x,1/2}^2 + u_{y,1/2}^2}$$

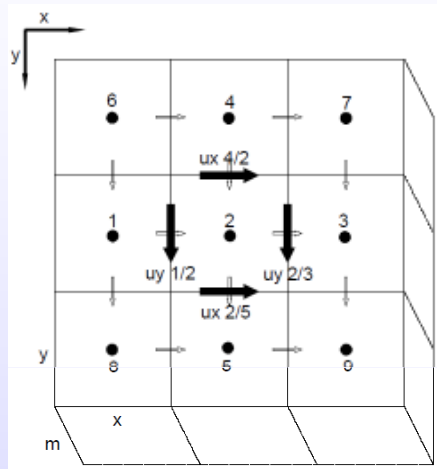
$$D_{xx,2/3} = \frac{\alpha_l u_{x,2/3} + \alpha_t u_{y,2/3}}{u}$$

$$u_{y,2/3} = \frac{u_{y,4/2} + u_{y,7/3} + u_{y,2/5} + u_{y,3/9}}{4}$$

$$u = \sqrt{u_{x,2/3}^2 + u_{y,2/3}^2}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Hauptkomponenten der Dispersionskoeffizienten Y-Richtung:



$$D_{yy,4/2} = \frac{\alpha_t u_{x,4/2} + \alpha_l u_{y,4/2}}{u}$$

$$u_{x,4/2} = \frac{u_{x,6/4} + u_{x,4/7} + u_{x,1/2} + u_{x,2/3}}{4}$$

$$u = \sqrt{u_{x,4/2}^2 + u_{y,4/2}^2}$$

$$D_{yy,2/5} = \frac{\alpha_t u_{x,2/5} + \alpha_l u_{y,2/5}}{u}$$

$$u_{x,2/5} = \frac{u_{x,8/5} + u_{x,5/9} + u_{x,1/2} + u_{x,2/3}}{4}$$

$$u = \sqrt{u_{x,2/5}^2 + u_{y,2/5}^2}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Nebenkomponenten der Dispersionskoeffizienten:

$$D_{xy,1/2} = \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_{x,1/2} u_{y,1/2}}{u}$$

$$D_{xy,2/3} = \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_{x,2/3} u_{y,2/3}}{u}$$

$$D_{yx,4/2} = \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_{x,4/2} u_{y,4/2}}{u}$$

$$D_{yx,2/5} = \frac{(\alpha_l - \alpha_t) u_{x,2/5} u_{y,2/5}}{u}$$

2D-FD-Verfahren ausführlich

Massenänderung ohne Wasserzugabe bzw. Entnahme am Knoten 2 bzw. in Zelle 2:

$$\Delta M_2 = \sigma_2 \Delta x_2 \Delta y_2 m_2$$

Aus den aufgeführten Einzelposten der Massenbilanz wird die Gesamtbilanz für den Knoten 2 bzw. die Zelle 2 aufgestellt:

$$\Delta s_2 = -\Delta a_{x,2} - \Delta a_{y,2} + \Delta q_2 + \Delta d_{x,2} + \Delta d_{y,2} + \Delta M_2$$

Die diskretisierte Transportgleichung muss für jedes räumliche Diskretisierungsintervall (Knoten/Zelle) und für jeden Zeitschritt gelöst werden. Dazu werden die lokalen Indices 1,2,3,4,... in globale Indices i,j , $i+1,j$, $i,j+1$, ... überführt.

Finite-Differenzen-Verfahren

Explizites Verfahren:

In den räumlichen Differenzentermen werden die Konzentrationen c zum Anfangszeitpunkt t benutzt. Die Konzentrationen zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ kommen dann nur einmal – im Speicherterm – vor. Die Knotengleichungen können unabhängig voneinander gelöst werden. Das Verfahren ist schnell, einfach zu programmieren und benötigt wenig Speicher.

Um numerische Stabilitätskriterien einzuhalten sind meist sehr kleine Zeitschritte einzuhalten.

Zeitliche Diskretisierung

Implizites Verfahren:

Alle Konzentrationen c in den räumlichen Differenzentermen werden zum Zeitpunkt $t+\Delta t$ angesetzt. Die neuen Konzentrationen am Knoten i hängen damit auch von den neuen Konzentrationen $i-1$ und $i+1$ ab.

Die Knotengleichungen können nicht mehr separat gelöst werden. Deshalb wird für n Knoten ein Gleichungssystem mit n Unbekannten aufgestellt und numerisch gelöst.

Anfangs- und Randbedingungen

- Für jeden Knoten muss zum Anfangszeitpunkt $t = 0$ eine Anfangskonzentration vorgegeben sein.
- Randbedingung 1. Art: an einem Knoten wird die Konzentration fest vorgegeben.
- Randbedingung 2. Art: an Rand wird knotenweise der dispersive Fluss über diesen Rand vorgegeben (nur sinnvoll bei Stromlinien, nicht bei Aquifer-Rändern)
- Randbedingung 3. Art: Vorgabe des Gesamtflusses durch Infiltration mit entsprechende Konzentration des Wassers

Numerische Stabilitätskriterien

Courant-Kriterium:

Beim expliziten Verfahren zur Lösung der Transportgleichung muss die Courant-Zahl immer kleiner eins sein. Andernfalls wird die Lösung instabil, es entstehen „unphysikalische“ Konzentrationen.

$$Co, i = \left| \frac{\Delta t u_i}{\Delta i} \right| \quad i = x, y, z$$

$$\frac{u \Delta t}{\Delta x} = Co \leq 1$$

Numerische Stabilitätskriterien

Neumann-Kriterium:

Das Neumann-Kriterium besagt, dass ein Konzentrationsgradient durch dispersiven Transport allein nicht umgekehrt werden darf.

$$\frac{D}{\Delta x^2} \Delta t = \frac{\Delta c_t}{2 \Delta c_x} \leq \frac{1}{2}$$

Numerische Stabilitätskriterien

Courant-Neumann-Kriterium:

Courant- und Neumann-kriterium können kombiniert werden, um Anforderungen an advektiven und dispersiven Transport gleichzeitig zu berücksichtigen

$$\frac{u \Delta t}{\Delta x} + \frac{2 D \Delta t}{\Delta x^2} \leq 1$$

Numerische Stabilitätskriterien

Brunnen-Kriterium:

Das Brunnen-Kriterium besagt, dass an einem Brunnen (Entnahme)-Knoten nicht mehr Masse entnommen werden darf, als bereits im Knoten vorhanden ist. An einem Zugabe-Knoten darf die Konzentration im Knoten durch Stoffzugabe nicht über den Wert der Zugabekonzentration steigen.

$$Q c \Delta t = \Delta c \Delta z \Delta y \Delta x n_e$$

$$\frac{Q \Delta t}{\Delta z \Delta y \Delta x n_e} = \frac{\Delta c}{c} \leq 1$$

Numerische Genauigkeitskriterien

Das FD-Verfahren ist insbesondere zur Lösung parabolischer Differentialgleichungen geeignet. Der hyperbolische Teil führt bei upwind-Gewichtung der räumlichen Differenzen zur sog. numerischen Dispersion.

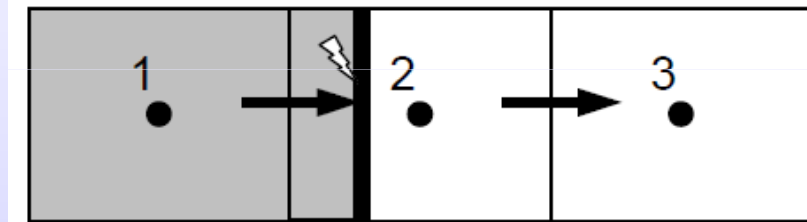
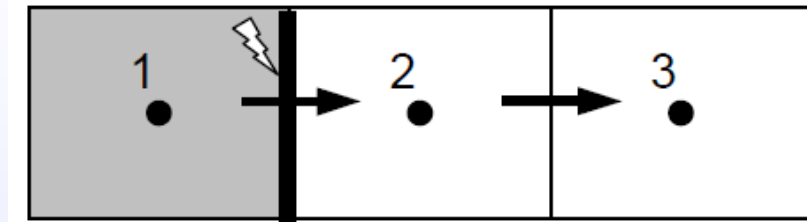
Die numerische Dispersion kann durch eine feine räumliche und zeitliche Diskretisierung minimiert werden. Die Gitter-Peclet-Zahl sollte immer kleiner gleich 2 sein.

$$Pe_x = \frac{u_x \Delta x}{D_{xx}}, Pe_y = \frac{u_y \Delta y}{D_{yy}}, Pe_z = \frac{u_z \Delta z}{D_{zz}}$$

Numerische Genauigkeitskriterien

Numerische Dispersion:

Eine scharfe Konzentrationsfront verlässt zum Zeitpunkt t den Knoten 1 auf Grund rein advektiven Transports. Nach dem Zeitschritt Δt ($\Delta t < \Delta x/u$) erreicht die Front eine Position zwischen Knoten 1 und 2. Auf Grund der Diskretisierung wird die Schadstoffmasse, die die Gitterzelle 1 verlassen hat, auf die gesamte Zelle 2 verteilt, d.h. die Schadstofffront wird künstlich aufgeweitet. Dadurch ist eine Vermischung wirksam, die numerische Dispersion genannt wird.



Generell gilt bei FD-Verfahren, dass eine Stofffahne mit mehreren Knoten in Querrichtung aufgelöst werden sollte.

Numerische Lösung Transportgleichung

Random-Walk-Verfahren:

Dient insbesondere der Vermeidung numerischer Dispersion.

Der advective Transport wird mit einem konventionellen particle-tracking beschrieben. Die particle-Bahnen zeichnen die Stromlinien nach.

Der diffusiv-dispersive Stofftransport wird durch eine Gauß-Verteilung approximiert. Dies entspricht der analytischen Basis-Lösung der 1D-Transportgleichung bei pulsförmiger Stoffzugabe.

Numerische Lösung Transportgleichung

Random-Walk-Verfahren:

Die Verteilung von Partikeln zu einer bestimmten Zeit kann daher als Normalverteilung mit dem Mittelwert $x = v_a \Delta t$ und der Standardabweichung $\Phi = 2Dt$ angesehen werden.

x gibt die mittlere advektive Bewegung der Partikel an. Φ ist ein Maß für die dispersive Streuung um den Mittelwert.

An einer oder mehreren Stellen werden N Partikel mit der Einzelmasse $m_p = \Delta M/N$ gestartet. Der Weg Δx , den ein Partikel innerhalb des Zeitschritts Δt zurücklegt, wird durch die Rechenvorschrift bestimmt:

Numerische Lösung Transportgleichung

Random-Walk-Verfahren:

$$\Delta x = u\Delta t + Z\sqrt{2D\Delta t}$$

Dabei ist Z eine normalverteilte Zufallsvariable mit dem Mittelwert 0 und der Standardabweichung 1. Aus der Überlagerung vieler Partikel, die sich so in einem Modellgebiet bewegen, ergibt sich eine Partikelwolke, mit der gewünschten mittleren advektiven Bewegung und einer Verbreiterung entsprechend des vorgegebenen Dispersionskoeffizienten.

Numerische Lösung Transportgleichung

Random-Walk-Verfahren:

Um aus der berechneten Partikelverteilung Konzentrationen bestimmen zu können, muss über ein bestimmtes Raumvolumen im Modellgebiet gemittelt werden (üblich ist über das FD-Gitter der Strömung). In einer Gitterzelle befindet sich das Wasservolumen

$$V_W = \Delta x B m n_e$$

Wenn sich zum Zeitpunkt t n Partikel mit der Masse $m_p = DM/N$ in diesem Volumen aufhalten, ergibt sich die Konzentration zu:

$$c(\Delta x, t) = \frac{nm_P}{V_W}$$

Numerische Lösung Transportgleichung

Charakteristiken-Verfahren:

MOC zerlegt jeden Transportschritt in einen advektiven und dispersiven Teilschritt und einen Schritt mit externen Quellen/Senken.

Im gesamten Modellgitter werden Partikel – zufällig oder geordnet - ausgestreut, die Anfangskonzentration der Partikel C_i ergibt sich aus den Stoffkonzentrationen der Gitterzellen.

Advektiver Transport durch forward particle tracking für einen Zeitschritt Δt .

Am Ende eines advektiven Teilschrittes wird die mittlere Konzentration in jeder Zelle des Modells ausgerechnet.

Numerische Lösung Transportgleichung

Charakteristiken-Verfahren:

Aus der neuen Konzentration am Ende des advektiven Teilschrittes wird dann die Konzentration bestimmt, auf deren Basis der dispersive Transport mit dem FD-Verfahren berechnet wird.

Nach der Berechnung des dispersiven Transports wird die Konzentrationen erneut zellenspezifisch aktualisiert.

Danach wird zur Konzentration des jeweiligen Partikel die Konzentrationsänderung durch Quellen/Senken entsprechend seiner Position addiert/subtrahiert und die Konzentration zellenspezifisch aktualisiert.

Der nächste Zeitschritt wird dann mit derselben Methode berechnet.

Fazit: Frei von numerischer Dispersion, großer Rechenaufwand, Fehler in der Massenbilanz möglich.

Vergleich der Verfahren

| | FD explizit | FD implizit | TVD | MOC | MMOC | HMOC |
|--|-------------|-------------|-------|-----------------|-------------|-------------|
| Rechenaufwand bzw. Speicherplatzbedarf | Klein | klein | groß | groß | klein | groß |
| Numerische Dispersion bzw. Oszillationen | Groß | groß | klein | nicht vorhanden | groß | klein |
| Massenbilanz | Exakt | exakt | exakt | nicht exakt | nicht exakt | nicht exakt |
| Zulässige Zeitschrittweite | Klein | groß | klein | groß | groß | groß |

Die Auswahl des optimalen Verfahrens ist aufgaben- bzw. fallspezifisch.

| Merkmale der Modellanwendung | Empfohlenes Verfahren |
|--|--|
| Starke räumliche Konzentrationsgradienten (z.B. Schadstofffahne mit punktförmiger Quelle, Laborexperimente mit pulsförmiger Stoffzugabe) | FD mit Interpolationsverfahren höherer Ordnung (keine upwind-Gewichtung), MOC, Random-Walk |
| Großräumiger Stofftransport mit geringen Konzentrationsgradienten (z.B. Nitrattransport mit flächenhaftem Eintrag) Kopplung von Transport und nichtlinearen Reaktionstermen (d.h. Oszillationen müssen unbedingt vermieden werden, exakte Massenbilanz ist wichtig) | FD FD mit upwind-Gewichtung bzw. upwind-Stabilisierung |
| Große Zeitschrittweite erforderlich (z.B. großräumiger Stofftransport im Aquifer über lange Zeiträume) | Gitterverfahren mit impliziter Zeit-Diskretisierung, MMOC, Random-Walk |
| Advektionsdominierter Transport mit großen Gitter-PECLET-Zahlen (d.h. kleine Dispersivitäten oder große Gitterweiten) | MOC, MMOC, Random-Walk |

Vergleich der Verfahren

Die nachfolgende Abbildung aus KINZELBACH (1992) zeigt die Stoffausbreitung in einer Grundströmung im Winkel von 45 Grad zu den Achsen für ein hypothetisches Modellgebiet. Die Diskretisierung war in allen Fällen gleich.

Abb. 1: zeigt das Modellgitter

Abb. 2: die exakte analytische Lösung

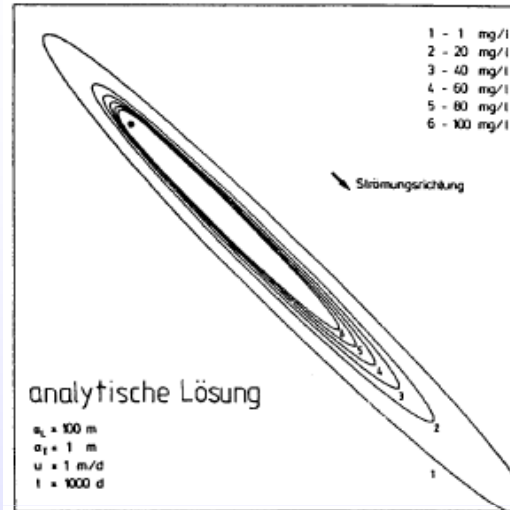
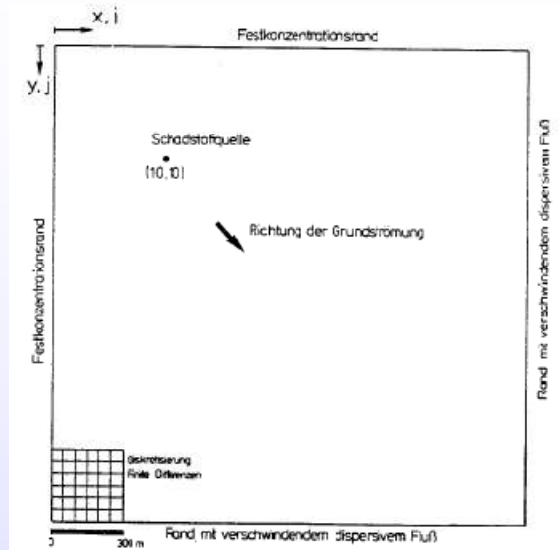
Abb. 3: FD-Verfahren upwind-Gewichtung

Abb. 4: FD-Verfahren zentral gewichtete Differenzen

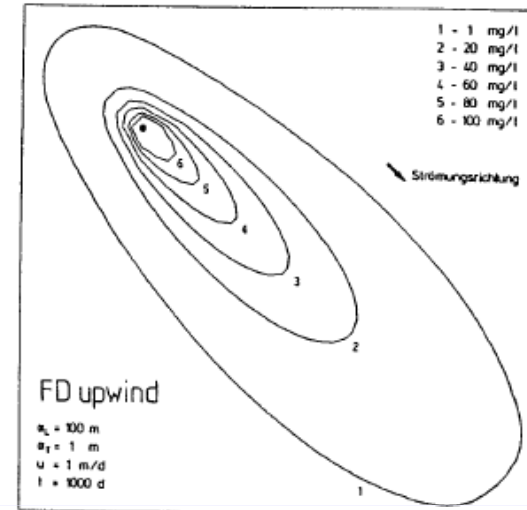
Abb. 5: Random Walk (5.000 Partikel)

Zu erkennen ist, dass die Finiten Differenzen zu einer deutlich numerischen Querdispersion führen. Das Random Walk-Ergebnis ist wenig glatt, liegt aber deutlich näher an der exakten analytischen Lösung

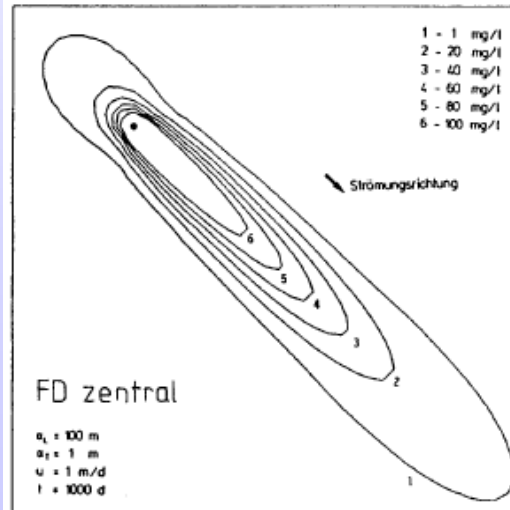
Vergleich der Verfahren



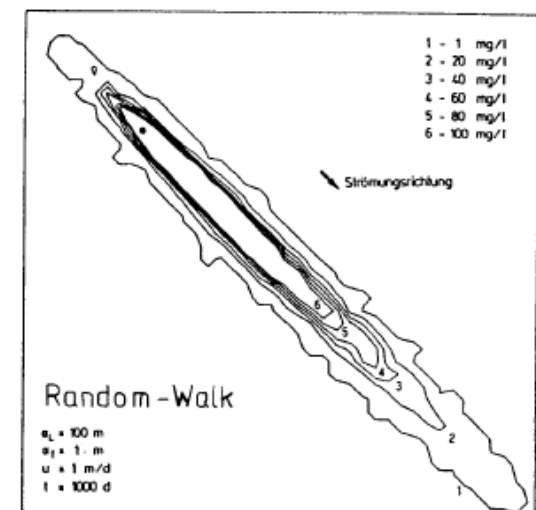
400 m



400 m



400 m



400 m